제 2 교시

수학 영역

만든 놈: crazy_hansuckwon
수만휘, 오르비 : 한석원의눈물

5지선다형

어려워보이지만 결국 기본문제

1. $(3^{2+\sqrt{2}})^{2-\sqrt{2}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 3 ③ 9 ④ 27 ⑤ 81

$3^{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} = 3^2$
$= \boxed{9}$

밑변환공식 거꾸로도 적용가능하다는 거~

2. $\dfrac{\log_4 64}{\log_4 8}$ 의 값은? [2점]

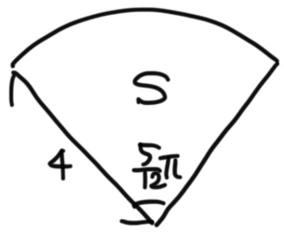
① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\log_8 64 = \boxed{2}$

부채꼴 넓이공식?

3. 반지름의 길이가 4이고 중심각의 크기가 $\frac{5}{12}\pi$인 부채꼴의 넓이는? [2점]

① $\frac{10}{3}\pi$ ② $\frac{11}{3}\pi$ ③ 4π ④ $\frac{13}{3}\pi$ ⑤ $\frac{14}{3}\pi$



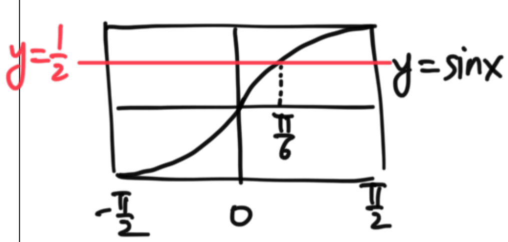
㉠ $S = \frac{1}{2}r^2\theta$
$= \frac{1}{2}\times 4^2 \times \frac{5}{12}\pi$
$= \boxed{\frac{10}{3}\pi}$

간단한 삼각방정식

4. $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 일 때, 방정식 $2\sin x - 1 = 0$의 해는? [3점]

① $-\frac{\pi}{3}$ ② $-\frac{\pi}{6}$ ③ 0 ④ $\frac{\pi}{6}$ ⑤ $\frac{\pi}{3}$

$\sin x = \frac{1}{2}$의 해



$\therefore$ ㉠ $\boxed{\frac{\pi}{6}}$

개뜬금 상용로그표?? 외울필요 일번 끝

5. 다음은 상용로그표의 일부이다.

수	⋯	7	8	9
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
5.9	⋯	.7760	.7767	.7774
6.0	⋯	.7832	.7839	.7846
6.1	⋯	.7903	.7910	.7917

위의 표를 이용하여 $\log 619$ 의 값을 구한 것은? [3점]

① 1.7910 ② 1.7917 ③ 2.7903 ④ 2.7917 ⑤ 3.7903

상용로그표에서 $\log 6.19 = 0.7917$

㉮ $\log 619 = \log(6.19 \times 100)$

$= \log 100 + \log 6.19$

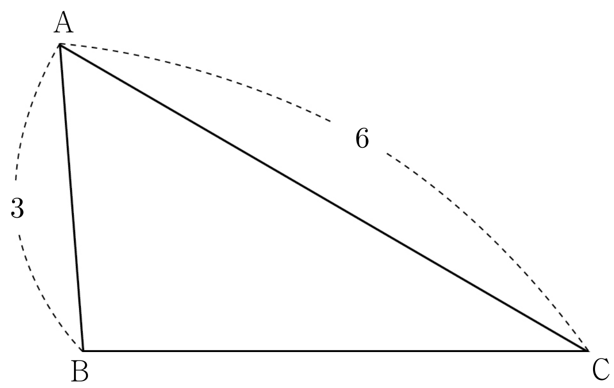
$= 2 + 0.7917$

$= \boxed{2.7917}$

사인법칙 VS 코사인법칙

6. $\overline{AB}=3$, $\overline{AC}=6$ 이고 $\cos A = \frac{5}{9}$ 인 삼각형 ABC 에서 선분 BC 의 길이는? [3점]

① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5 ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6



㉮ $\overline{BC}^2 = 3^2 + 6^2 - 2 \times 3 \times 6 \times \cos A$ (cos Law)

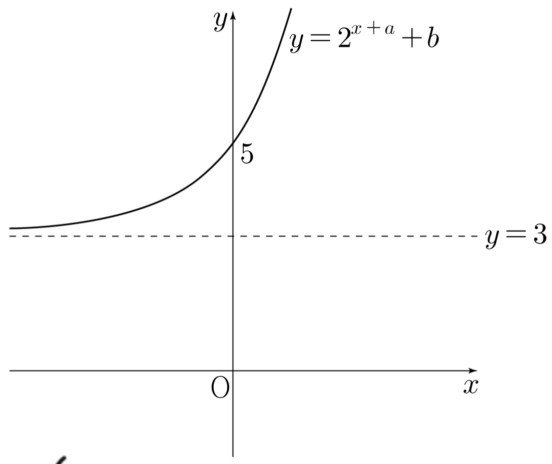
$= 45 - 36 \times \frac{5}{9}$

$= 25$

$\therefore \overline{BC} = \boxed{5}$ ($\overline{BC} > 0$)

지수함수의 여러 성질

7. 두 상수 a, b에 대하여 함수 $y=2^{x+a}+b$의 그래프가 그림과 같을 때, $a+b$의 값은? (단, 직선 $y=3$은 함수의 그래프의 점근선이다.) [3점]



① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

$y=2^{x+a}+b$의 점근선: $y=b$ ⇒ $y=3$ $\therefore b=3$

곧 $y=2^{x+a}+3$ 가 $(0, 5)$를 지나므로

$5 = 2^a + 3$ $\therefore a=1$

㉮ $a+b = \boxed{4}$

함수의 평행/대칭이동은 기본

8. 함수 $y=\log_2 x+1$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 후 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하였더니 함수 $y=2^{x-1}+5$의 그래프와 일치하였다. 상수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5 ✓

$y=\log_2 x+1$을 x축 방향으로 a만큼 평·이한 그래프는

$y=\log_2 x$를 $\begin{cases} x\text{축 방향으로 } a \\ y\text{축 방향으로 } 1 \end{cases}$ 평·이한 그래프

이를 $y=x$ 대칭이동 : 역함수!

곧 역함수는 $y=\log_2 x$의 역함수인 $y=2^x$을 $\begin{cases} x\text{축 방향으로 } 1 \\ y\text{축 방향으로 } a \end{cases}$

평·이한 함수이고 $y=2^{x-1}+a$ 이다.

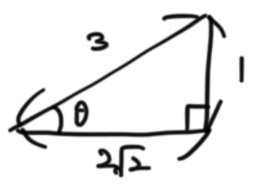
$\therefore$ ㉮ $a=\boxed{5}$

θ 범위에만 주의해서 값 구하면 됨.

9. $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$인 θ에 대하여 $\sin\theta=-\frac{1}{3}$일 때, $\tan\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ✓ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{4}$

<sol.1> θ를 예각으로 간주하고 △그리자.



$\Rightarrow \tan\theta=\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$ 에서

$\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$ 이므로 $\tan\theta>0$

$\therefore$ ㉮ $\tan\theta=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{4}}$

<sol.2>

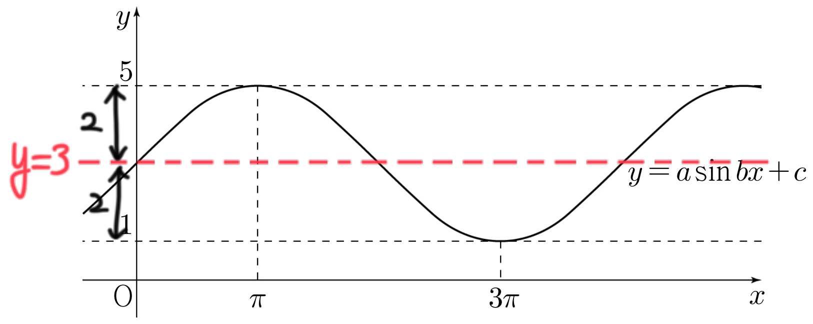
$\sin\theta=-\frac{1}{3}$ 이므로 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 에서 $\cos^2\theta=\frac{8}{9}$

$\therefore \cos\theta=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ $(\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi)$

㉮ $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{4}}$

7번 문제와 비슷한 느낌으로 삼각함수의 변형

10. 세 상수 a, b, c에 대하여 함수 $y=a\sin bx+c$의 그래프가 그림과 같을 때, $a\times b\times c$의 값은? (단, $a>0$, $b>0$) [3점]



① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3 ✓

기준이 $y=3$ 이므로 $c=3$

폭이 2이므로 $a=2$ $(a>0)$

반주기가 $\pi\sim3\pi$ 이므로 2π $\Rightarrow$ 주기는 4π

$\therefore \frac{2\pi}{|b|}=4\pi$ 이므로 $b=\frac{1}{2}$ $(b>0)$

㉮ $a\times b\times c=2\times\frac{1}{2}\times3$
$=\boxed{3}$

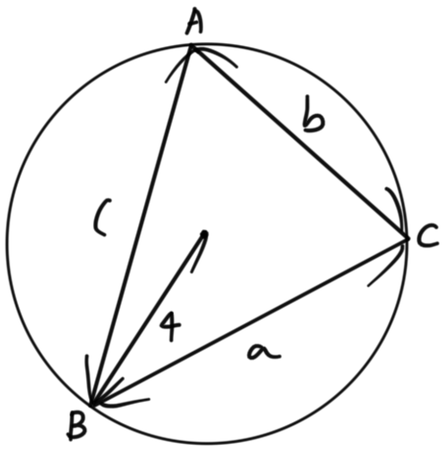
만든 놈: [O] crazy_hansuckwon
수만휘, 오르비: 한석원의눈물

sin(A+B)=sin(π−C)=sinC 체크했으면 좋음!

역함수 직접 구하기 VS 성질만 이용하기 (정시 준비할거면 후자 많이 연습!!)

11. 반지름의 길이가 4인 원에 내접하는 삼각형 ABC가 있다. 이 삼각형의 둘레의 길이가 12일 때, $\sin A+\sin B+\sin(A+B)$의 값은? [3점]

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{8}{5}$ ③ $\frac{17}{10}$ ④ $\frac{9}{5}$ ⑤ $\frac{19}{10}$



Sin Law

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R=8$

$\Rightarrow a=8\sin A,\ b=8\sin B,\ c=8\sin C$

$\Rightarrow \underbrace{a+b+c}_{\text{둘레의 길이}}=8(\sin A+\sin B+\sin C)=12$

$\therefore \sin A+\sin B+\sin C=\frac{3}{2}$

㉠ $\sin A+\sin B+\sin(A+B)$는

삼각형의 내각 크기 합 $\angle A+\angle B+\angle C=\pi$ 에서

$A+B=\pi-C$ 이므로

$\sin A+\sin B+\sin(\pi-C)$

$=\sin A+\sin B+\sin C$ 이다.

곧 정답은 $\boxed{\frac{3}{2}}$

12. 함수 $f(x)=3^{x-2}+a$의 역함수의 그래프가 점 $(a+5,\ a+2)$를 지날 때, 3^a의 값은? (단, a는 상수이다.) [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

역함수가 $(a+5,\ a+2)$를 지나므로

$f(x)$는 $(a+2,\ a+5)$를 지난다.

$\Rightarrow 3^a+a=a+5$ 이므로

㉠ $3^a=\boxed{5}$

※ 물론 역함수 직접 구해도 되지만 "성질"을 우선적으로 보는 연습!

$f(x)=3^{x-2}+a$ 의 역함수

$\Rightarrow x=3^{y-2}+a$

$\Rightarrow \log_3(x-a)+2=y$ 에 $(a+5,\ a+2)$ 대입

$\Rightarrow a+2=\log_3 5+2$

$\therefore a=\log_3 5$ 이므로 ㉠ $3^a=\boxed{5}$

이차부등식은 결국 등식일 때가 경계

13. 부등식

$$(2^x-8)\left(\frac{1}{3^x}-9\right)\geq 0$$

을 만족시키는 정수 x의 개수는? [3점]

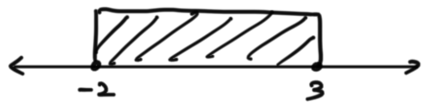
① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

i) $2^x-8\geq 0$, $\frac{1}{3^x}-9\geq 0$ 을 만족

⇒ $x\geq 3$, $x\leq -2$ 이므로 존재 X

ii) $2^x-8\leq 0$, $\frac{1}{3^x}-9\leq 0$ 을 만족

⇒ $x\leq 3$, $x\geq -2$ 이므로



∴ ㉮ 만족하는 x는 $-2, -1, 0, \cdots 3$

$\boxed{6개}$

소인수분해 후 자연수될 조건 찾기

14. 등식

⊕ 중학교 때 비슷한 유형 많이 봤을걸?

$$\left(\frac{\sqrt[6]{5}}{\sqrt[4]{2}}\right)^m\times n=100$$

을 만족시키는 두 자연수 m, n에 대하여 $m+n$의 값은? [4점]

① 40 ② 42 ③ 44 ④ 46 ⑤ 48

$\sqrt[6]{5}=5^{\frac{1}{6}}$, $\sqrt[4]{2}=2^{\frac{1}{4}}$ 이므로 (밑이 양수이므로 유리수지수 사용가능)

$\left(\frac{\sqrt[6]{5}}{\sqrt[4]{2}}\right)^m=\left(\frac{5^{\frac{1}{6}}}{2^{\frac{1}{4}}}\right)^m$ 이다.

⇒ $5^{\frac{1}{6}m}\times n=100\times 2^{\frac{1}{4}m}$

n이 자연수이므로 $\frac{1}{6}m$과 $\frac{1}{4}m$은 모두 자연수이고, 곧 m은 4와 6의 공배수이다.

i) $m=12$

$5^2\times n=100\times 2^3$ ∴ $n=32$

ii) $m=24$

$5^4\times n=100\times 2^6$ ∴ 자연수 n은 존재 X

⋮

이후 쭉 모순 (∵ 100이 5라는 소인수를 2개만 가지고 있기 때문)

㉮ $m+n=12+32$

$=\boxed{44}$

만든 놈: crazy_hansuckwon
수만휘, 오르비: 한석원의눈물

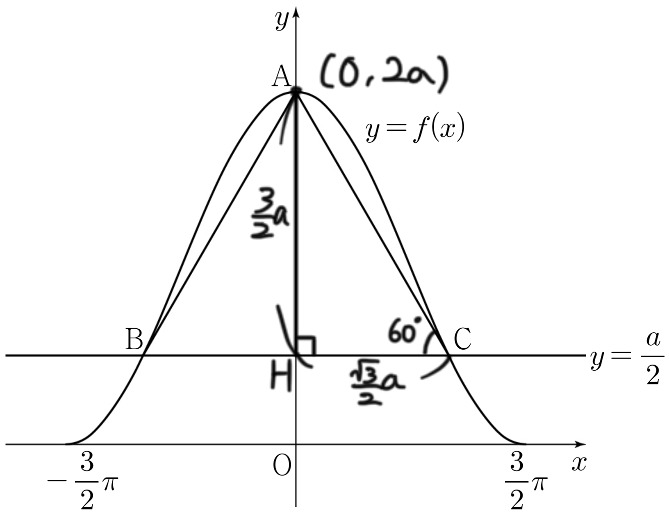
정삼각형? 특수각 가능성 ↑↑

15. $-\frac{3}{2}\pi \le x \le \frac{3}{2}\pi$에서 정의된 함수 — 길이 3π 주기: $\frac{2\pi}{\frac{2}{3}} = 3\pi$

$$f(x) = a\cos\frac{2}{3}x + a \quad (a>0)$$

이 있다. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 y축과 만나는 점을 A, 직선 $y=\frac{a}{2}$와 만나는 두 점을 각각 B, C라 하자. 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, a의 값은? [4점]

① $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$ ② $\frac{5\sqrt{3}}{12}\pi$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$ ④ $\frac{7\sqrt{3}}{12}\pi$ ⑤ $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$

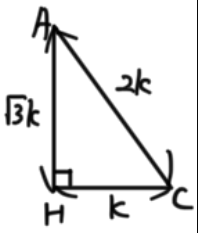


$f(x)$의 주기와 $[-\frac{3}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi]$ 구간의 길이가 동일하므로 주어진 함수는 한 주기에서 정의

$A(0, a\cos 0 + a)$

$\Rightarrow A(0, 2a)$

곧 그림에서 $\overline{AH}$ = 정△의 높이 = $\frac{3}{2}a$이므로



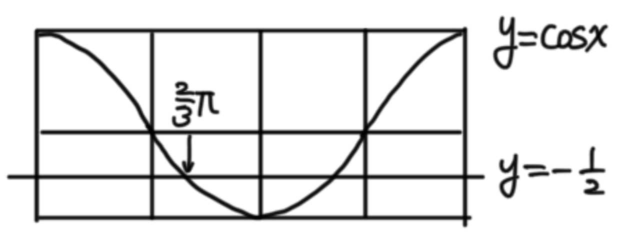
$\Rightarrow \overline{HC} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

$\therefore C\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a, \frac{1}{2}a\right)$

점 C는 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$\frac{1}{2}a = a\cos\frac{\sqrt{3}}{3}a + a$ 에서 $\cos\frac{\sqrt{3}}{3}a = -\frac{1}{2}$

이때 a의 범위는 $0 < \frac{\sqrt{3}}{2}a < \frac{3}{2}\pi$이므로 $0 < a < \sqrt{3}\pi$



$\therefore \frac{\sqrt{3}}{3}a = \frac{2}{3}\pi$ 에서 ㉠ $a = \boxed{\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi}$

(길이) 거리는 절댓값!! ⇒ 좌표 잡고 차근차근

16. 0이 아닌 실수 t에 대하여 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=\log_4 x$와 직선 $y=t$가 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 삼각형 OPQ의 넓이를 $S(t)$라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, O는 원점이다.) [4점]

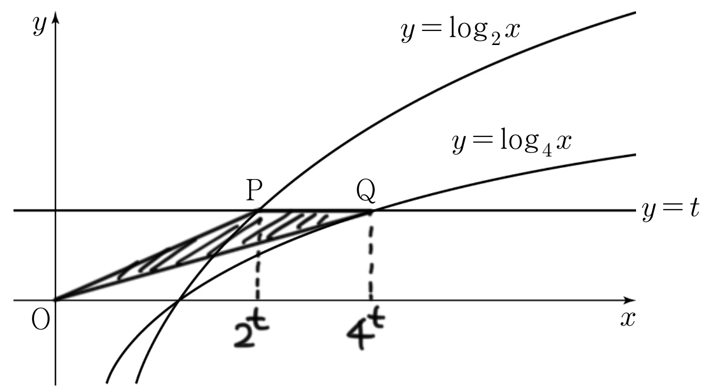
<보 기>

ㄱ. $S(1)=1$

ㄴ. $S(2)=64\times S(-2)$

ㄷ. $t>0$일 때, t의 값이 증가하면 $\frac{S(t)}{S(-t)}$의 값도 증가한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



$P(2^t, t)$, $Q(4^t, t)$ 에서 출발!

$S(t) = \frac{1}{2}\times|4^t - 2^t|\times|t|$ 에서 — 밑변, 높이

왜 절댓값? 4^t와 2^t의 대소관계 달라질 수 있고 t가 양수라는 보장 X

ㄱ. $S(1) = \frac{1}{2}\times1\times(4-2) = \boxed{1}$

ㄴ. $S(2) = \frac{1}{2}\times(4^2-2^2)\times2$
$S(-2) = \frac{1}{2}\times(2^{-2}-4^{-2})\times2$ } $S(2)=kS(-2)$을 물어보는건

$(4^2-2^2) = k(2^{-2}-4^{-2})$을 물어보는 것과 동일.

$\therefore 12 = \frac{3}{16}k$ 이므로 ㉠ $k=\boxed{64}$

ㄷ. 계산할 필요도 없이 ㄷ은 옳음.

왜? t가 증가하면 4^t-2^t과 $2^{-t}-4^{-t}$ 모두 증가하지만 4^t-2^t가 증가하는 속도가 $2^{-t}-4^{-t}$이 증가하는 속도보다 훨씬 빠름!

⇒ 높이는 같은 비율로 증가하므로 $S(t)$ 증가율이 $S(-t)$보다 큼

$\therefore \boxed{\frac{S(t)}{S(-t)} \text{ 증가}}$

※ 직접계산?

$S(t) = \frac{1}{2}\times(4^t-2^t)\times t$, $S(-t) = \frac{1}{2}(2^{-t}-4^{-t})\times t$

$\frac{S(t)}{S(-t)} = \frac{4^t-2^t}{2^{-t}-4^{-t}} = 2^{3t}$

이 때 2^{3t}은 증가함수이므로 $\frac{S(t)}{S(-t)}$도 $\boxed{\text{증가한다}}$

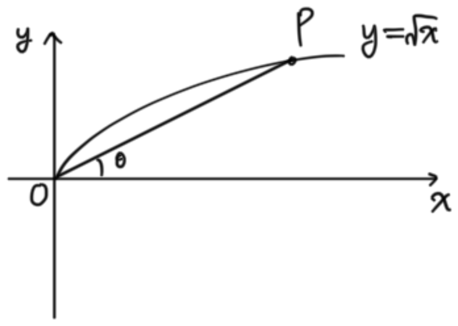
만든 놈: crazy_hansuckwon
수완취, 오그비 : 한석원의눈물

좌표 잡기 ⊕ 직선의 기울기와 $\tan\theta$의 관계

대칭성 쓰면 계산 조금이나마 줄일 수 있음. 결국 또 좌표잡기

17. 좌표평면에서 곡선 $y=\sqrt{x}\,(x>0)$ 위의 점 P에 대하여 동경 OP가 나타내는 각의 크기를 θ라 하자. $\cos^2\theta-2\sin^2\theta=-1$일 때, 선분 OP의 길이는? (단, O는 원점이고, x축의 양의 방향을 시초선으로 한다.) [4점]

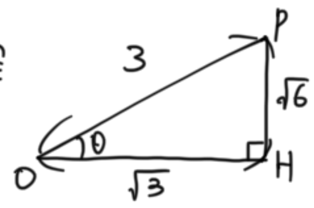
① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ④ 1 ⑤ $\frac{\sqrt{5}}{2}$



$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ 이므로 $\cos^2\theta-2\sin^2\theta=1-3\sin^2\theta=-1$

$\therefore \sin^2\theta=\frac{2}{3}$ 이므로 $\sin\theta=\frac{\sqrt{6}}{3}$ $(0<\theta<\frac{\pi}{2})$

곧



이때 $\tan\theta=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}=\sqrt{2}$ 이므로

$P(\alpha, \sqrt{2}\alpha)$로 둘 수 있다.

곧 $y=\sqrt{x}$에 $P(\alpha,\sqrt{2}\alpha)$를 대입하면 $\sqrt{2}\alpha=\sqrt{\alpha}$ $(\alpha>0)$

$\Rightarrow 2\alpha^2=\alpha$ 이므로 $\alpha=\frac{1}{2}$ 이고, $P(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$

$\therefore$ ㉠ $\overline{OP}=\sqrt{(\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}$

$=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

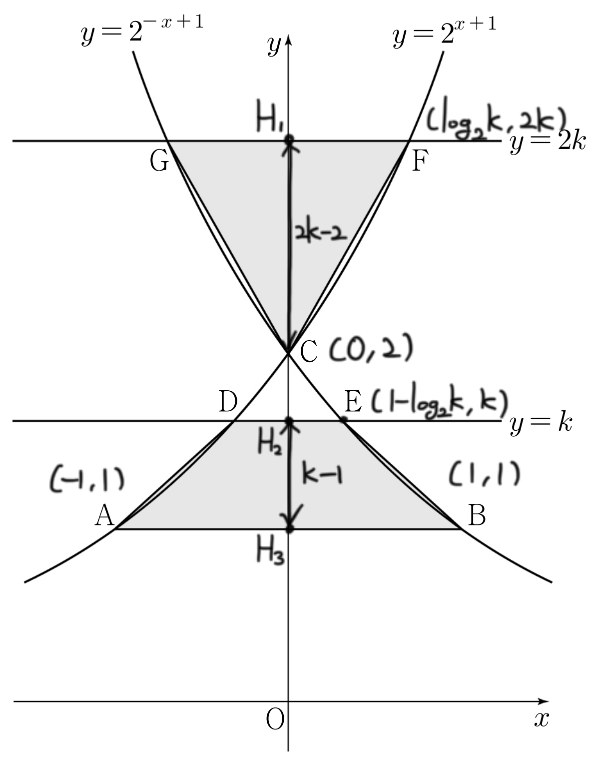
18. 그림과 같이 두 곡선 $y=2^{x+1}$, $y=2^{-x+1}$과 세 점 A$(-1, 1)$, B$(1, 1)$, C$(0, 2)$가 있다. 실수 $k\,(1<k<2)$에 대하여 두 곡선

$$y=2^{x+1},\ y=2^{-x+1}$$

과 직선 $y=k$가 만나는 점을 각각 D, E,

직선 $y=2k$가 만나는 점을 각각 F, G라 하자.

사각형 ABED의 넓이와 삼각형 CFG의 넓이가 같을 때, k의 값은? [4점]



① $2^{\frac{1}{6}}$ ② $2^{\frac{1}{3}}$ ③ $2^{\frac{1}{2}}$ ④ $2^{\frac{2}{3}}$ ⑤ $2^{\frac{5}{6}}$

$y=2^{x+1}$ 와 $y=2^{-x+1}$ 는 y축 대칭이므로 ($\because$ x 대신 $-x$ 대입)

점G와 점F는 y축 대칭 $\Rightarrow$ $\triangle FH_1C=\triangle GH_1C$

점D, 점E와 점A와 점B는 각각 y축 대칭 $\Rightarrow$ $\square DH_2H_3A=\square EH_2H_3B$

곧 $\square ABED=2\square EH_2H_3B$, $\triangle CFG=2\triangle FH_1C$ 이므로

$\square EH_2H_3B=\triangle FH_1C$이다.

점E는 $y=2^{-x+1}$ 와 $y=k$의 교점이므로 $k=2^{-x+1}$ $\Rightarrow \log_2 k=-x+1$

$\Rightarrow x=1-\log_2 k$

$\therefore E(1-\log_2 k, k)$

① 곧 $\square EH_2H_3B=\frac{1}{2}\times(1+1-\log_2 k)\times(k-1)$

$=\frac{1}{2}\times(2-\log_2 k)\times(k-1)$ 이고,

점F는 $y=2^{x+1}$ 와 $y=2k$의 교점이므로 $2k=2^{x+1}$ $\Rightarrow \log_2 2k=\log_2 k+1=x+1$

$\Rightarrow x=\log_2 k$

$\therefore F(\log_2 k, 2k)$

② 곧 $\triangle FH_1C=\frac{1}{2}\times\log_2 k\times(2k-2)$ 이다.

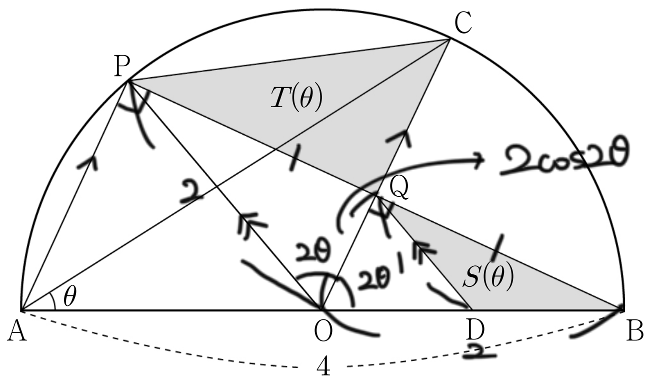
$\Rightarrow \cancel{\frac{1}{2}}\times(2-\log_2 k)\times\cancel{(k-1)}=\cancel{\frac{1}{2}}\times\log_2 k\times\underbrace{\cancel{(2k-2)}}_{2}$

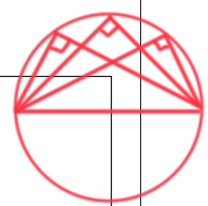
$\therefore \log_2 k=\frac{2}{3}$ 이므로 ㉠ $k=\boxed{2^{\frac{2}{3}}}$

만든 놈: crazy_hansuckwon
수만휘, 오르비 : 한석원의눈물

최대한 증명과정에서 생략된 부분 전부 설명하려고 했는데 가독성이 좋은진...

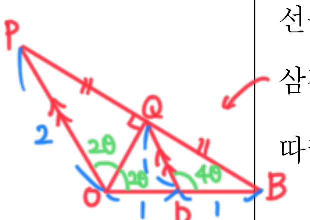
19. 그림과 같이 길이가 4인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 선분 AB의 중점을 O라 하고, 호 AB 위의 점 C에 대하여 점 A를 지나고 선분 OC와 평행한 직선과 호 AB의 교점을 P, 선분 OC와 선분 BP의 교점을 Q라 하자. 점 Q를 지나고 선분 PO와 평행한 직선과 선분 OB의 교점을 D라 하자. $\angle CAB=\theta$라 할 때, 삼각형 QDB의 넓이를 $S(\theta)$, 삼각형 PQC의 넓이를 $T(\theta)$라 하자. 다음은 $S(\theta)$와 $T(\theta)$를 구하는 과정이다. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$)





$\angle CAB=\theta$이므로 $\angle COB=2\theta$이다.
중심각 = 2 × 원주각
삼각형 POB가 이등변삼각형이고 $\angle OQB=\frac{\pi}{2}$이므로
$\overline{PO}=\overline{OB}=2$ (반지름)
문제조건에서 $AP /\!/ OC$ 인데 $\angle APB=\frac{\pi}{2}$ 이므로
점 Q는 선분 PB의 중점이고 $\angle POQ=2\theta$이다.

선분 PO와 선분 QD가 평행하므로
삼각형 POB와 삼각형 QDB는 닮음이다.
2 : 1 닮음
따라서 $\overline{QD}=$ (가) 1 이고 $\angle QDB=$ (나) 4θ 이므로
$S(\theta)=\frac{1}{2}\times$ (가) 1 $\times 1\times\sin($ (나) 4θ $)$
이다. $\overline{CQ}=\overline{CO}-\overline{QO}$이므로
$T(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{PQ}\times\overline{CQ}=\sin 2\theta\times(2-$ (다) $2\cos 2\theta$ $)$
이다.
$\frac{\overline{QO}}{2}=\cos 2\theta$ 이므로
$\overline{QO}=2\cos 2\theta$



위의 (가)에 알맞은 수를 p라 하고, (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(\theta)$, $g(\theta)$라 할 때, $p\times f\left(\frac{\pi}{16}\right)\times g\left(\frac{\pi}{8}\right)$의 값은? [4점]

① $\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$ ② $\frac{\sqrt{2}}{5}\pi$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{6}\pi$
④ $\frac{\sqrt{2}}{7}\pi$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{8}\pi$

곧 $p=1$, $f(\theta)=4\theta$, $g(\theta)=2\cos 2\theta$ 이므로

㉠ $p\times f(\frac{\pi}{16})\times g(\frac{\pi}{8})$

$=1\times\frac{\pi}{4}\times 2\cos\frac{\pi}{4}$

$=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{4}\pi}$

개인적으로 20>21 난이도. 케이스 분류 잘해서 잘 세어보자. a의 최대 ≠ a+b의 최대 이건 주의~

20. 1이 아닌 두 자연수 a, b가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a<b<a^2$
(나) $\log_a b$는 유리수이다.

$\log a<\frac{3}{2}$일 때, $a+b$의 최댓값은? [4점]

① 250 ② 270 ③ 290 ④ 310 ⑤ 330

(가) 조건에서 $\log_a a<\log_a b<\log_a a^2$ ($\because$ a는 2이상인 자연수)

$\Rightarrow$ $1<\log_a b<2$ 인 유리수.

$\log a<\frac{3}{2}$ 이므로 $a<10^{\frac{3}{2}}$ 이고, $\sqrt{1000}=31.XX$이므로 $a\le 31$이다.

이때 $\log_a b$는 유리수이므로 $\log_a b=\frac{q}{p}$ (p, q는 서로소인 자연수)로 놓을 수 있다.

$\therefore b=a^{\frac{q}{p}}$ $\left(1<\frac{q}{p}<2\right)$

곧 b가 자연수가 되려면 a는 어떤 자연수의 거듭제곱꼴.

$\because$ ex) $a=31$ 이면 $b=31^{\frac{q}{p}}$ $\left(1<\frac{q}{p}<2\right)$ 에서
이를 만족하는 자연수 b는 존재하지 않지만 $a=8$과 같은 수면
$b=8^{\frac{q}{p}}=2^{\frac{3q}{p}}$ 에서 $\frac{q}{p}=\frac{4}{3}$ 등 가능.

a+b의 최댓값을 물었으므로 자연스레 a의 최댓값 쪽부터 본다.

$\Rightarrow$ n^k꼴 중 31보다 작거나 같은 최댓값: $3^3=a$

곧 $1<a<b<a^2<1000$ 에서 $1<3^3<b<3^6<1000$ 이고,
이 중 $b=(3^3)^{\frac{q}{p}}$를 만족하는 자연수 b의 최댓값은 3^5

$\therefore$ $a+b=3^3+3^5=270$ (a+b 최댓값 후보)

당연히 a가 최대인 것은 일반적으로 a+b가 최대인 것과 관련이 없으므로
다른 케이스도 봐야하는데, 다른 경우를 보면
i) $a=25$ (5^2)일 때 $1<5^2<b<5^4<1000$ 에서 b의 최댓값은 5^3
$\therefore$ $a+b=5^2+5^3=140$
ii) $a=16$ (4^2)일 때 $1<4^2<b<4^4<1000$에서 b의 최댓값은 4^3
$\therefore$ $a+b=4^2+4^3=80$

이 이후로는 $a+b<a+a^2$ 인데 $a+a^2$가 애초에 270을 못 넘어서 체크할 필요 X

㉠ a+b 최댓값 = $\boxed{270}$

※ 가능한 모든 (a, b) 순서쌍은
$(4,8)$, $(8,16)$, $(8,32)$, $(16,32)$, $(16,64)$,
$(16,128)$, $(9,27)$, $(25,125)$, $(27,81)$, $(27,243)$

그래프 잘 그리고 … x절편 잘 표기하고 … 하나하나 구간 나눠서 하다보면 금방 풀림

21. 자연수 n에 대하여 $\frac{n-1}{6}\pi \le x \le \frac{n+2}{6}\pi$에서 함수

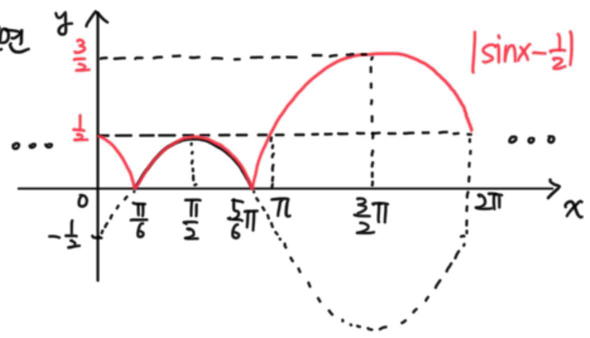
$$f(x)=\left|\sin x-\frac{1}{2}\right|$$

의 최댓값을 $g(n)$이라 하자. 40 이하의 자연수 k에 대하여 $g(k)$가 무리수가 되도록 하는 모든 k의 값의 합은? [4점]

① 115 ② 117 ③ 119 ④ 121 ⑤ 123

$\frac{n-1}{6}\pi \le x \le \frac{n+2}{6}\pi$ 구간 길이 $\frac{\pi}{2}$ $\left(\because \frac{n+2}{6}\pi-\frac{n-1}{6}\pi=\frac{\pi}{2}\right)$

$f(x)$ 그래프를 그려보면



$f(x)$는 주기가 2π이므로 n이 12 더해질 때마다 구간 반복된다.

($\because$ 구간 $\frac{n-1}{6}\pi \le x \le \frac{n+2}{6}\pi$ 에 $n+12$을 대입하면 $2\pi+\frac{n-1}{6}\pi \le x \le 2\pi+\frac{n+2}{6}\pi$)

i) $n=1$일 경우 구간 $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ 에서 $f(x)$의 최댓값은 $\frac{1}{2}$ (유리수이므로 모순)

⋮

사실 구간 $0 \le x \le \pi$ 에 주어진 구간 $\frac{n-1}{6}\pi \le x \le \frac{n+2}{6}\pi$가 포함되면 무조건 최댓값 $\frac{1}{2}$

$\Rightarrow 1 \le n \le 4$ 까지 전부 최댓값 $\frac{1}{2}$ (유리수이므로 모순)

그 후, 구간을 잘 관찰해보면 주어진 구간의 오른쪽 끝점 $\frac{n+2}{6}\pi=\frac{3}{2}\pi$ 이 될 때까지는 계속 구간의 맨 오른쪽 점이 최댓값. $\Rightarrow (5 \le n \le 7)$

$\Rightarrow$ $n=5$일 경우 구간 $\frac{2}{3}\pi \le x \le \frac{7}{6}\pi$ 에서 $f(x)$의 최댓값은 $\left|\sin\frac{7}{6}\pi-\frac{1}{2}\right|=1$

$\Rightarrow$ $n=6$일 경우 구간 $\frac{5}{6}\pi \le x \le \frac{4}{3}\pi$ 에서 $f(x)$의 최댓값은 $\left|\sin\frac{4}{3}\pi-\frac{1}{2}\right|$: 무리수

$\Rightarrow$ $n=7$일 경우 구간 $\pi \le x \le \frac{3}{2}\pi$ 에서 $f(x)$의 최댓값은 $\frac{3}{2}$

그 후 주어진 구간의 왼쪽 끝점 $\frac{n-1}{6}\pi$이 $\frac{3}{2}\pi$이 될 때까지는 계속 $\frac{3}{2}$이 최댓값.

$\Rightarrow (8 \le n \le 10)$

남은 것도 관찰해보면

$n=11$일 경우 구간 $\frac{5}{3}\pi \le x \le \frac{13}{6}\pi$ 에서 $f(x)$ 최댓값 : $\left|\sin\frac{5}{3}\pi-\frac{1}{2}\right|$: 무리수

$n=12$일 경우 구간 $\frac{11}{6}\pi \le x \le \frac{7}{3}\pi$ 에서 $f(x)$ 최댓값 : $\left|\sin\frac{11}{6}\pi-\frac{1}{2}\right|=1$

$\therefore$ 종합하면 $1 \le n \le 12$에서 조건을 만족하는 $n=6, 11$ 이므로 주기를 생각하면

40 이하의 자연수 k : 6, 6+12, 6+24, 11, 11+12, 11+24

$\rightarrow$ ㉮ $(\underbrace{6+18+30}_{54})+(\underbrace{11+23+35}_{69})$

$=\boxed{123}$

단답형

루트는 분수지수!

22. $\sqrt[3]{27^2}\times 3^2$ 의 값을 구하시오. [3점]

$\sqrt[3]{27^2}=\sqrt[3]{3^6}=3^2$ 이므로

㉮ $\sqrt[3]{27^2}\times 3^2=3^2\times 3^2$
$=\boxed{81}$

로그의 정의 이해

23. 방정식 $\log_{\frac{1}{2}}(x+3)=-4$ 의 해를 구하시오. [3점]

$x+3=\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$ 이므로 $x+3=16$

㉮ $x=\boxed{13}$

삼각함수의 주기를 결정하는 요소

24. 두 함수 $y=\cos\frac{2}{3}x$와 $y=\tan\frac{3}{a}x$의 주기가 같을 때, 양수 a의 값을 구하시오. [3점]

$y=\cos\frac{2}{3}x$ 주기 : $\dfrac{2\pi}{\frac{2}{3}}=3\pi$

$y=\tan\frac{3}{a}x$ 주기 : $\dfrac{\pi}{\frac{3}{|a|}}=\frac{|a|}{3}\pi$

같다.

∴ $3\pi=\frac{|a|}{3}\pi$ 이므로 ㉠ 양수 $a=\boxed{9}$

그저 대입 ⊕ 삼각함수의 각변환

25. 함수 $f(x)=4\cos(x+\pi)+k$의 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{3}, 5\right)$를 지날 때, 상수 k의 값을 구하시오. [3점]

$5=4\cos\left(\frac{\pi}{3}+\pi\right)+k$

$\Rightarrow \cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$ 이므로

$5=-2+k$

㉠ $k=\boxed{7}$

치환은 항상 범위주의! $\begin{cases} a^x+a^{-x}=t \\ a^x-a^{-x}=t \end{cases}$ 치환했을 때 t의 범위는 알아두자.

26. 등식

$$(3^a+3^{-a})^2=2(3^a+3^{-a})+8$$

을 만족시키는 실수 a에 대하여 27^a+27^{-a}의 값을 구하시오. [4점]

$3^a+3^{-a}=X$로 치환 $\rightarrow$ $3^a>0,\ 3^{-a}>0$ 이므로

$3^a+3^{-a}\geq 2\sqrt{3^a\cdot 3^{-a}}=2$ (산술기하평균)

∴ $X\geq 2$

$\Rightarrow X^2=2X+8$

$\Rightarrow X^2-2X-8=0$ 이므로 $(X-4)(X+2)=0$ 이므로 $X=4$ ($\because X\geq 2$)

㉠ 27^a+27^{-a}

$=(3^a+3^{-a})^3-3\cdot 3^a\cdot 3^{-a}(3^a+3^{-a})$

$=X^3-3X$

∴ $X^3-3X=64-12$

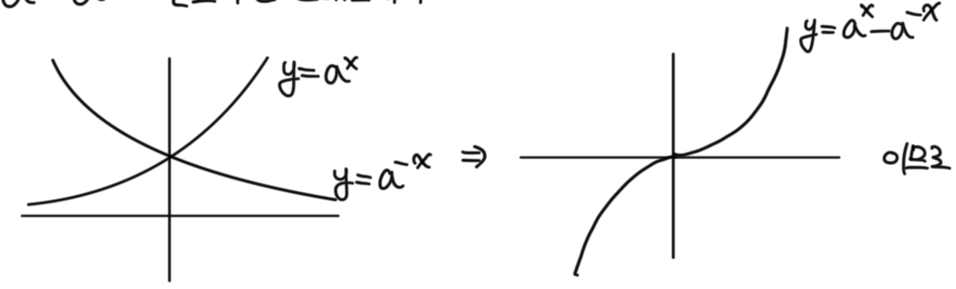
$=\boxed{52}$

※ $a^x+a^{-x}=t$로 두면 $a^x>0,\ a^{-x}>0$ 이므로

산술·기하 평균에 의해 $a^x+a^{-x}\geq 2\sqrt{a^x\cdot a^{-x}}=2$

∴ $t\geq 2$ 이다.

$a^x-a^{-x}=t$로 두면 그래프에서



이므로

$-\infty<a^x-a^{-x}<\infty$ 이다. 곧 t는 모든 실수

(그림은 $a>1$인 경우를 그려놨지만, $0<a<1$인 경우도 마찬가지)

문제 꼼꼼히 읽자. A나 B는 자연수의 집합이다.

27. 자연수 전체의 집합의 두 부분집합

$$A=\{a,\ b,\ c\},\quad B=\{\log_2 a,\ \log_2 b,\ \log_2 c\}$$

에 대하여 $a+b=24$이고 집합 B의 모든 원소의 합이 12일 때, 집합 A의 모든 원소의 합을 구하시오. (단, a, b, c는 서로 다른 세 자연수이다.) [4점]

$\log_2 a+\log_2 b+\log_2 c=12$ 이므로 $\log_2 abc=12$

$\Rightarrow abc=2^{12}$ 이므로 $a=2^{\alpha}, b=2^{\beta}, c=2^{\gamma}$로 놓을수있다.

곧 $a+b=2^{\alpha}+2^{\beta}=24$에서 이를 만족하는 자연수 a, b는 8, 16뿐이므로

$\alpha=3, \beta=4$ 이다. (또는 $\alpha=4, \beta=3$)

이 때 $2^{\alpha}\times2^{\beta}\times2^{\gamma}=2^{\alpha+\beta+\gamma}=2^{12}$ 이므로 $\alpha+\beta+\gamma=12$ 에서

$\alpha+\beta=7$ 이므로 $\gamma=5$ 이다

$\therefore A=\{2^3, 2^4, 2^5\}$

㉠ $2^3+2^4+2^5=\boxed{56}$

삼각함수의 대칭성~ 딱 고3때 이러문 3점 정도로 나올만한 문제

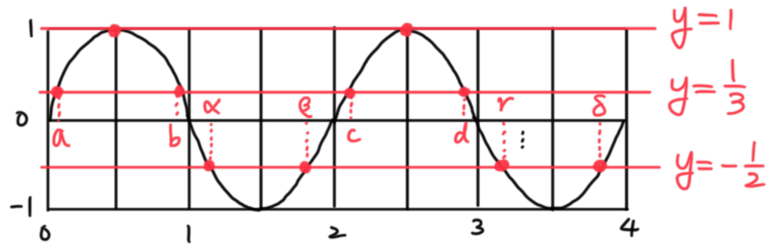
28. 자연수 n에 대하여 $0\le x\le4$일 때, x에 대한 방정식

$$\sin\pi x-\frac{(-1)^{n+1}}{n}=0$$

의 모든 실근의 합을 $f(n)$이라 하자.
$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

$\sin\pi x=\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ 을 만족하는 실근

$\Rightarrow y=\sin\pi x$ 그래프를 그려보면 $(0\le x\le4)$



$f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)$를 구하기 위해서는 각각

$y=\sin\pi x$와 $y=1, y=-\frac{1}{2}, y=\frac{1}{3}, y=-\frac{1}{4}, y=\frac{1}{5}$의 교점파악!

i) $\sin\pi x=1$의 실근 : $x=\frac{1}{2}, x=2+\frac{1}{2}$ $\therefore f(1)=3$

ii) $\sin\pi x=-\frac{1}{2}$의 실근 : 그림에서 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 이고, 삼각함수의 대칭성을 이용

$\Rightarrow \dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{3}{2}, \quad \dfrac{\gamma+\delta}{2}=\dfrac{7}{2}$ $\therefore \alpha+\beta=3, \gamma+\delta=7$

곧 $f(2)=10$

iii) $\sin\pi x=\frac{1}{3}$의 실근: 그림에서 a, b, c, d 이고, 삼각함수의 대칭성을 이용

$\Rightarrow \dfrac{a+b}{2}=\dfrac{1}{2}, \quad \dfrac{c+d}{2}=\dfrac{5}{2}$ $\therefore a+b=1, \quad c+d=5$

곧 $f(3)=6$

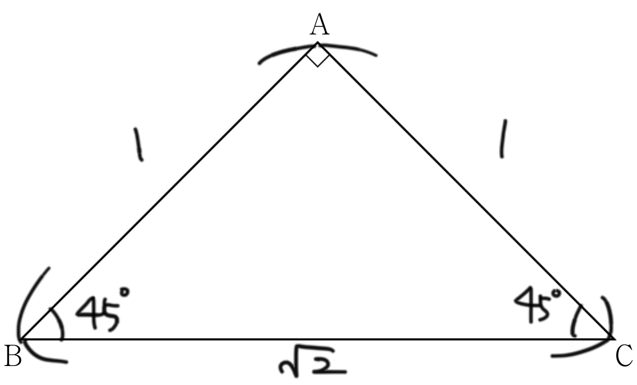
이 때, $f(4)$는 삼각함수의 대칭성을 이용하면 $f(2)$와 동일 $\Rightarrow f(4)=10$
$f(5)$ 〃 $f(3)$와 동일 $\Rightarrow f(5)=6$

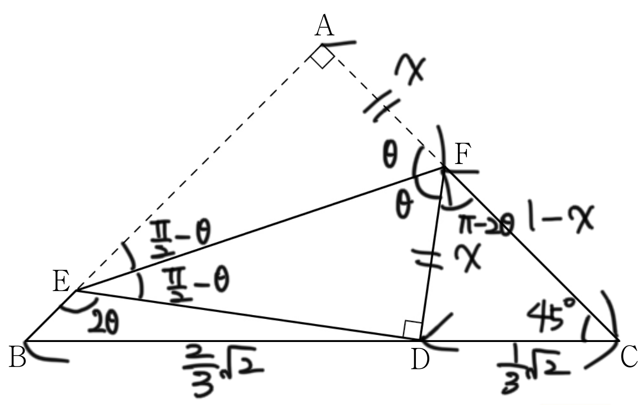
㉠ $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)$
$=3+10\times2+6\times2$
$=\boxed{35}$

만든놈: ⓘ crazy_hansuckwon
수만휘, 오르비 : 한석원의눈물

종이접기에서 가장 중요한 건 접기 전 부분과 접은 부분은 합동이라는 것

29. 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AC}=1$, $\angle BAC=\frac{\pi}{2}$ 인 삼각형 ABC 모양의 종이가 있다. 선분 BC 위의 점 D, 선분 AB 위의 점 E, 선분 AC 위의 점 F에 대하여 선분 EF를 접는 선으로 하여 점 A가 점 D와 겹쳐지도록 접었다. 삼각형 BDE와 삼각형 DCF의 외접원의 반지름의 길이의 비가 2 : 1일 때, 선분 DF의 길이는 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, 종이의 두께는 고려하지 않으며, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]





$\overline{AF}=x$로 두면 $\overline{FD}$도 당연히 x이고, $\overline{FC}=1-x$이다.
또한 $\angle AFE=\angle DFE=\theta$로 두면 $\angle AEF=\angle FED=\frac{\pi}{2}-\theta$

$\therefore$ $\angle BED=2\theta$ 이고, $\angle DFC=\pi-2\theta$ 임을 이용해 sin Law 적용가능.

문제 조건에서 $\triangle BDE$ 와 $\triangle DCF$의 외접원의 반지름 비가 2 : 1
$\Rightarrow$ $\triangle BDE$ 외접원의 반지름 R_1, $\triangle DCF$ 외접원의 반지름 R_2
$\Rightarrow R_1=2R_2$

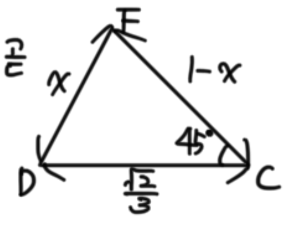
sin Law

$$\frac{\overline{BD}}{\sin 2\theta}=2R_1=4R_2,\quad \frac{\overline{DC}}{\sin(\pi-2\theta)}=\frac{\overline{DC}}{\sin 2\theta}=2R_2$$

$\Rightarrow \frac{\overline{BD}}{\sin 2\theta}=2\times\frac{\overline{DC}}{\sin 2\theta}$ 이므로 $\overline{BD}=2\times\overline{DC}$

이때 $\overline{BD}+\overline{DC}=\overline{BC}=\sqrt{2}$ 이므로 $\overline{BD}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\overline{DC}=\frac{\sqrt{2}}{3}$

곧



에서 cos Law 적용

$\Rightarrow x^2=(1-x)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2-2(1-x)\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}\cos 45°$

$\Rightarrow x=\frac{5}{12}$

$\therefore p+q=5+12=\boxed{17}$

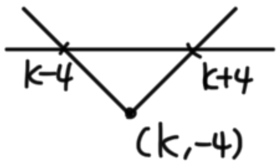
열심히 경계 위주로 case 분류. 해봤자 4가지밖에 안됨

30. 함수 $f(x)=|x-k|-4$ (k는 실수)와 양의 실수 a ($a\neq 1$)에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} a^{-f(x)} & (f(x)<0) \\ a^{f(x)} & (f(x)\geq 0) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=16$의 교점의 개수가 3이고 $g(1)=16$일 때, 모든 $f(a-2)$의 값의 합을 구하시오. [4점]

$f(x)$는

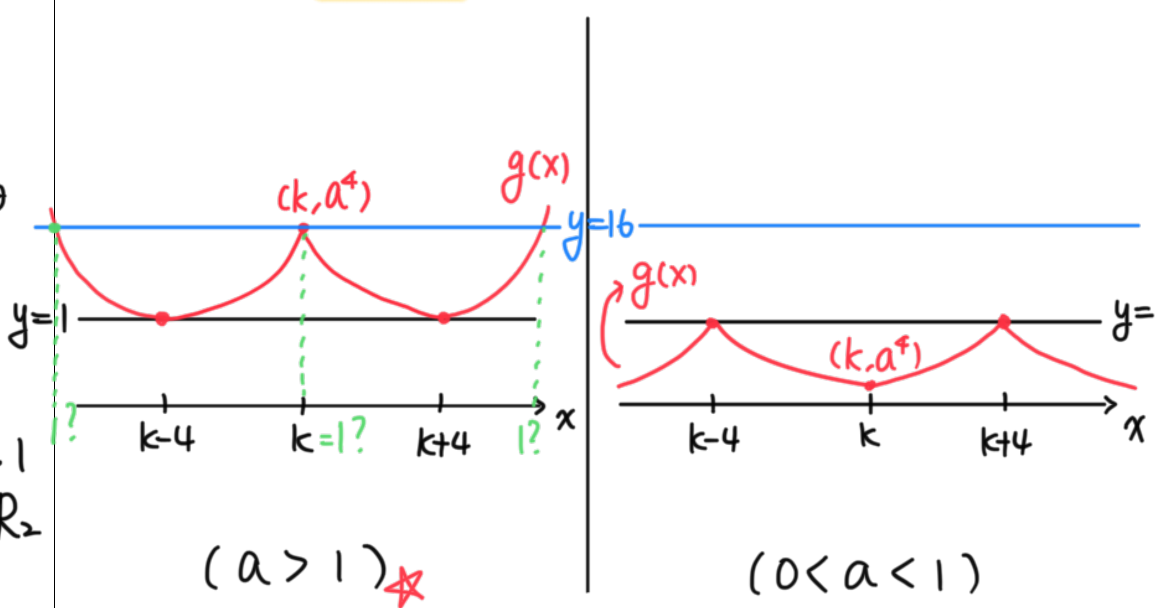


이고, $g(x)=\begin{cases} a^{-f(x)} & (f(x)<0) \\ a^{f(x)} & (f(x)\geq 0) \end{cases}$ 이므로

$g(x)$는 $x=k$, $x=k-4$, $x=k+4$ 에서 함수 변동

$$\therefore g(x)=\begin{cases} a^{x-k-4} & (x\geq k+4) \\ a^{-(x-k-4)} & (k\leq x<k+4) \\ a^{-(-x+k-4)} & (k-4\leq x<k) \\ a^{-x+k-4} & (x<k-4) \end{cases}$$

이제 $a>1$, $0<a<1$ 으로 case 분류하고 그래프 열심히 그리면



$\Rightarrow$ $y=16$과의 교점이 3개가 가능한 경우는 $a>1$ 이고, 이 경우 $a^4=16$이다.

$\therefore$ $a=2$ $(a>1)$

이때 $g(1)=16$인데 이는 그림에서 ① $2^{-x+k-4}=16$ ② $k=1$ ③ $2^{x-k-4}=16$ 으로 case 분류.

①: $2^{-1+k-4}=16$ 에서 $k=9$, ③: $2^{1-k-4}=16$ 에서 $k=(-7)$

$\therefore$ $f(a-2)=f(0)$ 이므로
$k=9$ 일 때는 $f(0)=|0-9|-4=5$
$k=1$ 일 때는 $f(0)=|0-1|-4=-3$
$k=-7$일 때는 $f(0)=|0+7|-4=3$

$\Rightarrow$ $f(0)$의 총합은 $\boxed{5}$