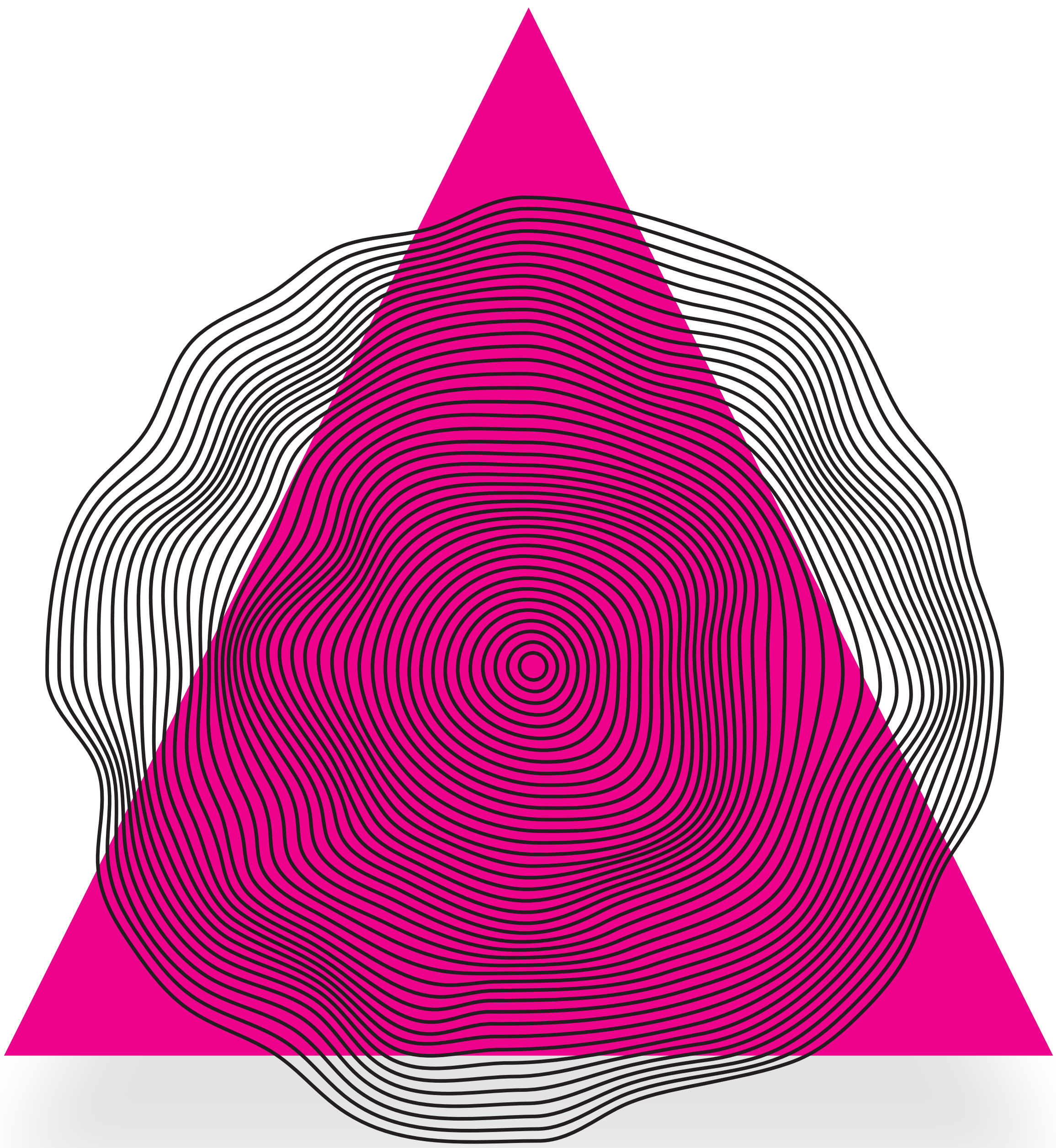
기출의_파급효과



수학영역 × 미적분 / 상 × EXTENSION

미적분(상)
EXTENSION
기출의 파급효과

미적분(상)

저자의 말

안녕하세요. 오르비 파급효과입니다. 집필한 지 4년째네요. EBS 선별, 기출의 파급효과 시리즈를 통해 큰 사랑을 받았습니다. 여기까지 오는데 너무 과분한 사랑을 주신 분들 너무 감사합니다. 이제 본격적으로 교재 소개를 해보겠습니다.

저는 다음과 같은 교재를 만들었습니다.

1. 기출의 파급효과 standard에는 미적분 기출을 푸는 데 정말 필요한 태도와 도구만을 모두 정리했습니다.

각 Chapter를 나누는 기준이 교과서 목차가 아닌 기출을 푸는 데 정말 필요한 태도와 도구입니다. 기존 개념서들보다 훨씬 얇습니다. 빠르게 실전 개념을 정리할 수 있습니다. 예제 해설까지 꼼꼼히 읽는다면 준킬러, 킬러 문제에서 생각의 틀이 확실히 잡힐 것입니다. 각 Chapter를 '순서대로' 학습하신다면 더욱 큰 학습효과를 기대할 수 있습니다.

2. 최중요 준킬러 이상급의 기출을 기출의 파급효과 standard 칼럼 예제로 들어 칼럼에서 배운 태도와 도구를 바로 활용할 수 있도록 하였습니다.

미적분 기출 중 킬러는 물론 오답률이 높은 문제들을 예제로 들었습니다. 본문 속 태도와 도구가 킬러, 준킬러에서 어떻게 보편적으로 이용되는지 직접 확인한다면 태도와 도구들이 더욱 와닿을 것입니다. 어떠한 한 문제에만 적용되는 특수한 스킬 같은 것이 아닙니다.

예제로 든 평가원 기출을 태도와 도구뿐만 아니라 진화 단계별로도 배치했습니다. 예제들을 '순서대로' 풀다보면 자연스럽게 기출의 진화과정을 느낄 수 있습니다. 기출의 진화과정을 느낀다면 자연스럽게 기출에 대한 태도와 도구들이 정리됩니다. 태도와 도구 정리가 완성되면 최종 진화 형태인 후반부의 최신 기출문제는 혼자 clear 할 수 있고 이에 대한 보람을 느끼실 겁니다.

예전 킬러 문제에 쓰였던 아이디어 2개 이상이 현재의 준킬러, 킬러에 쓰입니다. 수능 때 킬러를 풀 생각이 없어 과거의 킬러를 제대로 학습하지 않는 우를 범한다면 준킬러도 못 풀거나 빨리 풀기 힘듭니다. 따라서 태도와 도구를 기반으로 한 기출의 킬러 학습은 필수입니다.

3. 평가원 문항뿐만 아니라 교육청, 사관학교 문항도 중요한 기출들입니다.

교육청 및 사관학교 문제가 진화한 형태가 평가원에 출제되고 있습니다. 따라서 기존 평가원 기출만을 푸는 것만으로 매년 빠르게 발전하는 수능을 대비하기에는 부족합니다. 하지만 교육청 및 사관학교 문제들까지 모두 풀자니 양이 너무 많습니다.

이를 해결하기 위해 핵심적인 평가원, 교육청, 사관학교 문제를 필요한 만큼만 선별했습니다.
기출의 파급효과 standard에는 평가원, 교육청, 사관학교 기출 중 가장 핵심이 되는 195문제를 담았습니다.
standard 미적분(상)에는 111문제, standard 미적분(하)에는 84문제입니다.

※ 문제 좌표에서 '나형' 또는 'A형' 또는 '인문계'라고 표시된 것을 제외하면 전부 '가형' 또는 'B형' 또는 '자연계' 기출입니다.

4. 예제 해설과 유제 해설은 문제를 푸는데에 있어 필요한 생각의 흐름을 매우 자세하게 담았습니다.

예제 해설과 유제 해설은 단계별로 분리되어 있어 이해가 더욱 쉽습니다. 문제에서 필요한 태도와 도구들을 어떻게 쓰는지 과외처럼 매우 자세히 알려줍니다.

※ 기출의 파급효과 미적분(상) Chapter 3 중 20학년도 이전의 기출 해설은 기대t가 작성하였습니다.

5. 더 많은 좋은 기출을 풀어보고 싶은 학생들을 위하여 기출의 파급효과 extension도 준비하였습니다.

기출의 파급효과 extension은 기출에 대한 태도와 도구를 체화하기 위해 예제보다는 다소 쉬운 유제 **extension 미적분(상) 173문제, extension 미적분(하) 72문제**로 구성되어 있습니다. extension의 유제는 연도순으로 배치되어있습니다.

standard와의 호환성을 위하여 extension에 담긴 기출 역시 standard의 목차를 따릅니다. **standard를 학습한 학생들이라면 extension을 워크북처럼 이용하시면 됩니다. standard 학습을 하면서 extension도 병행한다면 효과도 배가 될 것입니다.** standard를 잘 학습하셨다면 extension에 담긴 기출도 무리 없이 풀릴 겁니다.

standard를 학습하고 더 이상의 기출보단 n제로 학습하길 희망하는 학생들은 n제로 넘어가셔도 좋습니다. standard로 정말 중요한 기출을 거의 다 본 것이나 마찬가지이기 때문입니다.

짧거나 쉬운 Chapter는 2~3일을 잡으시고 길거나 어려운 Chapter는 6~7일 정도를 잡으시면 됩니다.
이를 따른다면 교재를 빠르면 한 달 내로 늦어도 두 달 내로 완료할 수 있을 것입니다.

개념을 한 번 떼고 쉬운 3~4점 n제(쎈 등)를 완료한 후 혼자 힘으로 할 수 있는 만큼 기출을 한 번 정도 열심히 풀고 기출의 파급효과를 시작하면 효과가 좋을 것입니다.

9월 평가원을 응시하기 전에 standard를 '제대로' 1회독을 완료하기만 해도 실력이 부쩍 늘어나 있을 것입니다. 9월 평가원 이후 수능 전까지는 기출의 파급효과에서 잘 안 풀렸던 기출 위주로 다시 풀며 끊임없이 실전 모의고사로 실전 연습을 한다면 수능 때도 분명 좋은 결과가 있을 것입니다.

수학 1등급, 아직 늦지 않았습니다. 마지막으로 한 번쯤 봐야 할 기출, 기출의 파급효과와 함께 합시다.

Chapter

04

그래프 그리기, 조건 해석

유제

01 05학년도 9월 평가원 26번

$0 < x < \frac{\pi}{4}$인 모든 x 에 대하여 부등식

$\tan 2x > ax$ 를 만족하는 a 의 최댓값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$

④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

02 10년 10월 교육청 28번

연속함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) = f(x+2)$ 이다.

(나) $\int_{1}^{\frac{3}{2}} f(2x)dx = 7$, $\int_{1}^{\frac{4}{3}} f(3x)dx = 1$

$\int_{2001}^{2012} f(x)dx$ 의 값은? [3점]

① 65 ② 71 ③ 82

④ 88 ⑤ 99

03 12년 3월 교육청 15번

열린 구간 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f'(x) = 1 + \{f(x)\}^2$

(나) $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

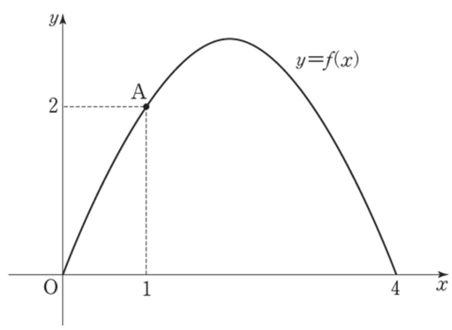
함수 $g(x) = \ln f'(x)$에 대하여 $g'\left(\frac{\pi}{4}\right)$의 값은? [3점]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2

④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

04 16학년도 6월 평가원 14번

닫힌 구간 $[0, 4]$ 에서 정의된 함수 $f(x) = 2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}x$의 그래프가 그림과 같고 직선 $y = g(x)$가 $y = f(x)$ 의 그래프 위의 점 A$(1, 2)$를 지난다. 일차함수 $g(x)$가 닫힌 구간 $[0,4]$에서 $f(x) \leq g(x)$를 만족시킬 때, $g(3)$의 값은? [4점]



① π ② $\pi+1$ ③ $\pi+2$

④ $\pi+3$ ⑤ $\pi+4$

05 16학년도 6월 평가원 21번

2 이상의 자연수 n에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x) = e^{x+1}\{x^2 + (n-2)x - n + 3\} + ax$$

가 역함수를 갖도록 하는 실수 a의 최솟값을 $g(n)$이라 하자. $1 \le g(n) \le 8$을 만족시키는 모든 n의 값의 합은? [4점]

① 43 ② 46 ③ 49

④ 52 ⑤ 55

06 16년 3월 교육청 30번

함수 $f(x) = x^2 e^{ax}$ $(a < 0)$에 대하여 부등식 $f(x) \ge t$ $(t > 0)$을 만족시키는 x의 최댓값을 $g(t)$라 정의하자. 함수 $g(t)$가 $t = \frac{16}{e^2}$에서 불연속일 때, $100a^2$의 값을 구하시오.

(단, $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$) [4점]

07 16년 4월 교육청 14번

다음은 모든 실수 x에 대하여 $2x - 1 \ge ke^{x^2}$을 성립시키는 실수 k의 최댓값을 구하는 과정이다.

$f(x) = (2x-1)e^{-x^2}$이라 하자.

$$f'(x) = (\boxed{\text{(가)}}) \times e^{-x^2}$$

$f'(x) = 0$에서 $x = -\frac{1}{2}$ 또는 $x = 1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 조사하면 함수 $f(x)$의 극솟값은 $\boxed{\text{(나)}}$ 이다.

또한

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

이므로

함수 $y = f(x)$의 그래프의 개형을 그리면 함수 $f(x)$의 최솟값은 $\boxed{\text{(나)}}$ 이다.

따라서 $2x - 1 \ge ke^{x^2}$을 성립시키는 실수 k의 최댓값은 $\boxed{\text{(나)}}$ 이다.

위의 (가)에 알맞은 식을 $g(x)$, (나)에 알맞은 수를 p라 할 때, $g(2) \times p$의 값은? [4점]

① $\frac{10}{e}$ ② $\frac{15}{e}$ ③ $\frac{20}{\sqrt[4]{e}}$

④ $\frac{25}{\sqrt[4]{e}}$ ⑤ $\frac{30}{\sqrt[4]{e}}$

08 16년 4월 교육청 27번

모든 실수 x에 대하여 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$이다.
> (나) $0 \le x \le 1$일 때, $f(x)=\sin\pi x+1$이다.
> (다) $1<x<2$일 때, $f'(x) \ge 0$이다.

$\int_0^6 f(x)dx = p+\dfrac{q}{\pi}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p, q는 정수이다.) [4점]

09 16년 10월 교육청 21번

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(-x)$이다.
> (나) 모든 양의 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이다.
> (다) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\pi$

함수 $g(x)=\dfrac{\sin f(x)}{x}$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 모든 양의 실수 x에 대하여 $g(x)+g(-x)=0$이다.
ㄴ. $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$
ㄷ. $f(\alpha)=\dfrac{\pi}{2}\ (\alpha>0)$이면 방정식 $|g(x)|=\dfrac{1}{\alpha}$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

10 17학년도 수능 30번

$x>a$에서 정의된 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 -1인 사차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.
(단, a는 상수이다.)

> (가) $x>a$인 모든 실수 x에 대하여 $(x-a)f(x)=g(x)$이다.
> (나) 서로 다른 두 실수 α, β에 대하여 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$, $x=\beta$에서 동일한 극댓값 M을 갖는다. (단, $M>0$)
> (다) 함수 $f(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수는 함수 $g(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수보다 많다.

$\beta-\alpha=6\sqrt{3}$일 때, M의 최솟값을 구하시오. [4점]

11 17년 7월 교육청 17번

함수 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-3x-\dfrac{k}{x}$가 열린 구간 $(0, \infty)$에서 증가할 때, 실수 k의 최솟값은?
[4점]

① 3 ② $\dfrac{7}{2}$ ③ 4
④ $\dfrac{9}{2}$ ⑤ 5

CHAPTER

04 해설

01 05학년도 9월 평가원 26번

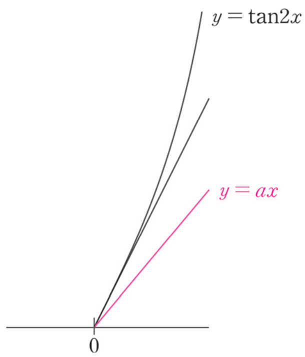
답 : ④

1. $y=\tan 2x$, $y=ax$는 공통적으로 원점을 지난다.

   $0<x<\dfrac{\pi}{4}$인 모든 x에 대하여 부등식 $\tan 2x > ax$을 만족하려면

   $y=\tan 2x$, $y=ax$의 그래프 개형은 오른쪽과 같아야 한다.

   즉, $y=ax$의 기울기가 $y=\tan 2x$의 원점에서의 접선의 기울기보다 작거나 같아야 한다.



2. $y=\tan 2x$, $y'=2\sec^2 2x$**이므로** $y=\tan 2x$**의 원점에서의 접선의 기울기는 2이다.**

   $a \le 2$이므로 a의 최댓값은 2이다.

※ 더욱 안전한 풀이

'곡선과 직선이 만나는 형태'보다 '곡선과 상수함수가 만나는 형태'를 다루는 것이 그래프 개형을 이용하여 문제를 풀 때 더욱 안전하다.

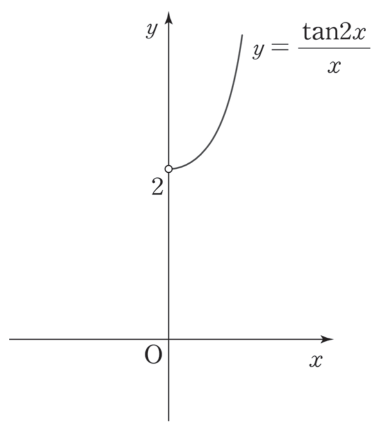
$0<x<\dfrac{\pi}{4}$이므로 $\tan 2x > ax$의 양변에 x로

나눈 $\dfrac{\tan 2x}{x} > a$를 생각해도 된다.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{x}=2$이므로 $y=\dfrac{\tan 2x}{x}$의 그래프 개형은

오른쪽과 같다. $0<x<\dfrac{\pi}{4}$에서 $\dfrac{\tan 2x}{x}>a$이 되기 위해서는

$a \le 2$이어야 한다. a의 최댓값은 2이다.



02 10년 10월 교육청 28번

답 : ④

1. 발문의 **연속 조건**과 **조건 (가)의 주기성**을 반드시 체크하자.
   $\int_{2001}^{2012} f(x)dx = \int_{1}^{12} f(x)dx$이다.

2. $\int_{1}^{\frac{3}{2}} f(2x)dx = \frac{1}{2}\int_{2}^{3} f(x)dx = 7$에서 $\int_{2}^{3} f(x)dx = 14$이다.

   마찬가지로 $\int_{1}^{\frac{4}{3}} f(3x)dx = \frac{1}{3}\int_{3}^{4} f(x)dx = 1$에서 $\int_{3}^{4} f(x)dx = \int_{1}^{2} f(x)dx = 3$이다.

3. $\int_{2001}^{2012} f(x)dx = \int_{1}^{12} f(x)dx = 5\times\int_{1}^{3} f(x)dx + \int_{1}^{2} f(x)dx = 5\times 17 + 3 = 88$이다.

03 12년 3월 교육청 15번

답 : ③

$g'\left(\frac{\pi}{4}\right)$를 구해야 하므로 $g(x) = \ln f'(x)$의 양변을 x에 대해 미분하자. $g'(x) = \frac{f''(x)}{f'(x)}$이다.

$f''(x) = 2f(x)f'(x)$이고, $f'(x) = 1 + \{f(x)\}^2$에서 $f'(x) > 0$이므로 $g'(x) = 2f(x)$이다.

따라서 $g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$이다.

04 16학년도 6월 평가원 14번

답 : ③

1. 발문과 그림을 잘 살펴보자. 직선 $y = g(x)$가 $y = f(x)$의 그래프와 한 점 A에서 만나고 $f(x) \le g(x)$이므로 함수 $g(x)$가 함수 $f(x)$위의 점 $\mathrm{A}(1, 2)$에서 접함을 알 수 있다.

2. 함수 $g(x)$를 구해보자. $g(x) = f'(1)(x-1) + f(1)$에서
   $f'(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi\cos\frac{\pi}{4}x$에서 $f'(1) = \frac{\pi}{2}$이고
   $f(1) = 2$이므로 $g(x) = \frac{\pi}{2}(x-1) + 2$이다. 따라서 $g(3) = \pi + 2$이다.

05 16학년도 6월 평가원 21번

답 : ④

1. **함수 $f(x)$의 역함수가 존재하기 위해서 함수 $f(x)$는 증가함수이거나 감소함수이어야 한다.**
   $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ **이므로 모든 실수 x에 대하여 함수 $f(x)$는 증가함수이다.** 즉, $f'(x) \ge 0$이다.

2. $y = f'(x)$의 그래프 개형은 오른쪽과 같다.
   함수 $f'(x)$ 의 최솟값은 0 이상이다.
   함수 $f'(x)$의 극솟값이 곧 함수 $f'(x)$의 최솟값이다.
   함수 $f'(x)$의 극솟값을 구하자.

   $f''(x) = e^{x+1}\{x^2 + (n+2)x + (n+1)\} = e^{x+1}(x+1)(x+n+1)$에서
   $x = -1$ 또는 $x = -n-1$이다.

   $n \ge 2$**이므로 $f'(-1)$이 함수 $f'(x)$의 극솟값이자 최솟값이다. 따라서 $f'(-1) \ge 0$이다.**
   $f'(-1) = 2 - n + a \ge 0$이므로 $a \ge n - 2$이다.

   따라서 $g(n) = n - 2$이다.

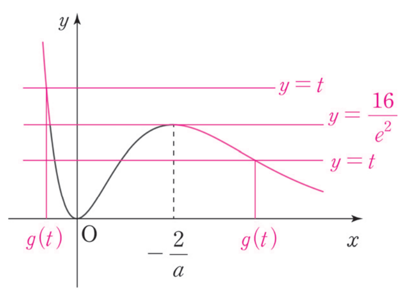
3. $1 \le g(n) \le 8$을 만족하는 n의 값을 구하자. $g(n) = n - 2$에서 $3 \le n \le 10$이다.

   따라서 모든 n의 값의 합은 $\sum_{n=3}^{10} n = \sum_{n=1}^{10} n - \sum_{n=1}^{2} n = 55 - 3 = 52$이다.

06 16년 3월 교육청 30번

답 : 25

1. $y = f(x)$의 그래프 개형은 '미분 없이' 그릴 수 있다.
   문제의 조건을 따라 $y = t$, $y = g(t)$를 나타내면 다음과 같다.



   따라서 $f(x)$의 극댓값이 $\frac{16}{e^2}$일 때, $g(t)$는 $t = \frac{16}{e^2}$에서 불연속이다.

2. $f'(x) = (ax^2 + 2x)e^{ax}$이므로 $x = -\frac{2}{a}$일 때 $f(x)$는 극대이다.
   $f\left(-\frac{2}{a}\right) = \frac{4}{ae^2} = \frac{16}{e^2}$이므로 $a^2 = \frac{1}{4}$이다. $a < 0$이므로 $a = -\frac{1}{2}$이다.

   따라서 $100a^2 = 25$이다.

07 16년 4월 교육청 14번

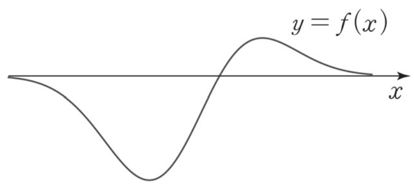
답 : ③

지문을 따라가며 빈칸을 하나하나 채워 가자.

1. $f(x)=(2x-1)e^{-x^2}$이므로 $f'(x)=(-4x^2+2x+2)e^{-x^2}$이다.
   따라서 $g(x)=$(가)$=-4x^2+2x+2=-2(2x+1)(x-1)$이다.

2. $f'(x)$의 부호는 $x=1$에서 양에서 음으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이고,
   $f'(x)$의 부호는 $x=-\dfrac{1}{2}$에서 음에서 양으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=-\dfrac{1}{2}$에서 극소이다.
   따라서 $f(x)$의 극솟값은 $p=$(나)$=f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-2e^{-\frac{1}{4}}$이다.

   ※ Chapter 4를 제대로 공부한 학생이라면 $y=f(x)$의 그래프 개형을 '미분 없이' 그릴 수 있다.



   $y=f(x)$의 그래프 개형은 위와 같다.

3. $g(2)\times p=(-10)\times\left(-\dfrac{2}{\sqrt[4]{e}}\right)=\dfrac{20}{\sqrt[4]{e}}$이다.

08 16년 4월 교육청 27번

답 : 12

1. 발문의 **연속 조건과 조건 (가)의 주기성**을 반드시 확인하자.
   $\int_0^6 f(x)dx=3\int_0^2 f(x)dx$이고, $f(0)=f(2)=1$이다.

2. $f(1)=1$**이므로 조건 (다)에 의하여 열린 구간** $(1,\ 2)$**에서 함수** $f(x)=1$**이다.**

3. $\int_0^6 f(x)dx=3\int_0^2 f(x)dx=3\int_0^1(\sin\pi x+1)dx+3$
   $=3\left[-\dfrac{1}{\pi}\cos\pi x+x\right]_0^1+3=\dfrac{6}{\pi}+6$이므로 $p=q=6$, $p+q=12$이다.

※ **'어떤 구간에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 증가함수이면 이 구간에서 $f'(x)\geq 0$이다.'는 참인 명제이다. 하지만 이 명제의 역인 '어떤 구간에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)\geq 0$라면 이 구간에서 $f(x)$가 증가함수이다.'는 거짓이다.** 자세한 내용은 해당 Chapter에 잘 담겨있으니 복습하자.

09 16년 10월 교육청 21번

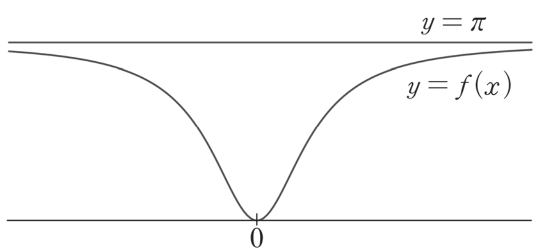
답 : ③

1. 함수 $f(x)$는 우함수이다. $y=\sin f(x)$는 우함수, $y=x$는 기함수이므로

   함수 $g(x)=\dfrac{\sin f(x)}{x}$는 기함수이다. 따라서 $g(-x)=-g(x)$이므로 $g(x)+g(-x)=0$이다.

   선지 (ㄱ)은 참.

2. $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 $f(x)=f(-x)$이므로 $f'(x)=-f'(-x)$이다.
   따라서 $f'(0)=0$이다. 조건을 만족하는 $y=f(x)$의 그래프 개형은 아래와 같다.

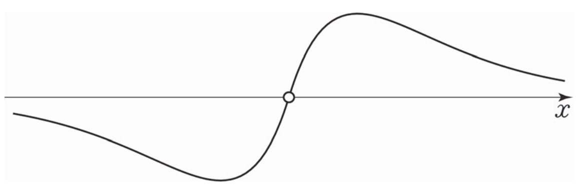


$\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin f(x)-\sin f(0)}{x-0}=f'(0)\cos f(0)$이다.

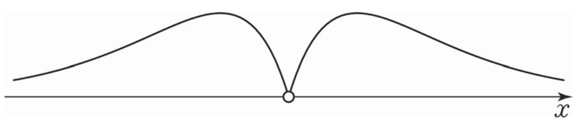
$f'(0)=0$, $\cos f(0)=1$이므로 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$이다. 선지 (ㄴ)은 참.

3. $g(x)$는 기함수이고 $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$을 만족하며 $y=f(x)$의 그래프 개형이 위와 같으므로

   $y=g(x)$의 그래프 개형은 아래와 같다.



따라서 $y=|g(x)|$의 그래프 개형은 아래와 같다.



$f(\alpha)=\dfrac{\pi}{2}\ (\alpha>0)$이면 $g(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha}$이다. 함수 $g(x)$가 $x=\alpha$에서 극대여야 $|g(x)|=\dfrac{1}{\alpha}$의

서로 다른 실근의 개수가 2이다.

$g'(x)=\dfrac{xf'(x)\cos f(x)-\sin f(x)}{x^2}$에서 $g'(\alpha)=\dfrac{\alpha f'(\alpha)\cos f(\alpha)-\sin f(\alpha)}{\alpha^2}=\dfrac{-1}{\alpha^2}\neq 0$

선지 (ㄷ)은 거짓.

10 17학년도 수능 30번

답 : 216

1. 먼저 **함수 $f(x)$가 $x>a$에서 정의되었다**는 점에 집중하자. 조건 (가)에서 $(x-a)f(x)=g(x)$를 보고 $f(x)$가 삼차함수라고 착각할 수 있으나 $f(x)$가 삼차함수라면 조건 (나)를 만족할 수 없다.

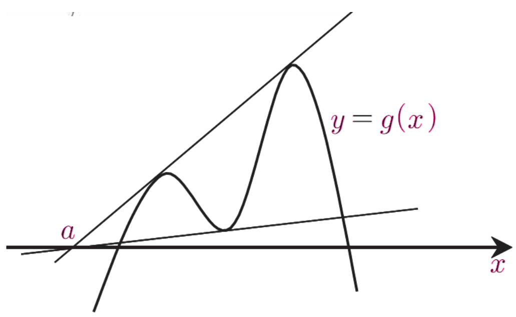
   $f(x)$가 삼차함수가 아닌 유리함수라는 것을 알 수 있다. 따라서 $f(x)=\dfrac{g(x)}{x-a}\ (x>a)$로 표현을 바꾸어 주도록 하겠다.

   미적분의 시작과 끝은 그래프 그리기이다. 이 교재에서 앞으로 제일 많이 반복할 말 중 하나이다.
   $y=f(x)$의 그래프를 그려보도록 하겠다.
   하지만 함수 $g(x)$에 대한 정보가 너무 부족하여 $y=f(x)$의 그래프를 그리는 것은 무리이다.
   그럼 어떻게 해야 할까?

   $f(x)=\dfrac{g(x)}{x-a}\ (x>a)$를 관찰해보니 미적분 ㄱㄴㄷ에서 자주 보던 보기 형태이다. **바로 평균 변화율, 즉 기울기 형태**이다. $\dfrac{g(x)}{x-a}\ (x>a)$**를 두 점 $(a,0)$과 $(x, g(x))$ 사이의 기울기**로 해석할 수 있다.

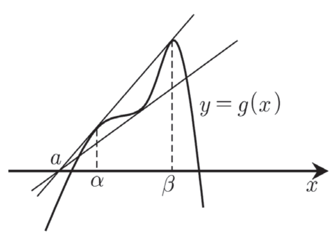
※ 미적분 ㄱㄴㄷ에서 필요한 조건 해석은 Chapter 9에서 자세히 소개한다.
$\dfrac{g(x)}{x-a}$ **꼴을 보고 무조건적으로 두 점 $(a,0)$과 $(x, g(x))$ 사이의 기울기로 보는 것은 지양해라.**

2. $y=g(x)$**의 그래프 개형**을 그려보자. $g(x)$는 최고차항의 계수가 -1인 사차함수이므로 일반적인 개형은 아래와 같다. **$f(x)$는 두 점 $(a,0)$과 $(x, g(x))$을 이은 직선의 기울기에 해당**한다.



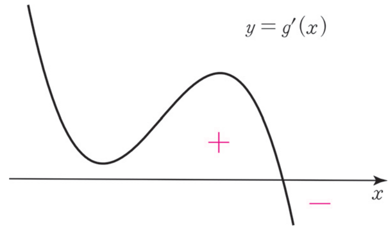
   $y=g(x)$의 그래프 개형이 위와 같을 때 **조건 (가), (나)를 만족한다.**
   $y=g(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 값은 3개이고 $y=f(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 값도 3개이므로 **조건 (다)를 만족하지 못한다.**

3. $y=f(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수를 늘리기는 어려워 보인다. **$y=g(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수를 줄이는 것**은 상대적으로 쉬워 보인다. **극점이 한 개가 되도록 $y=g(x)$의 그래프 개형을 수정**하자.



이제 **조건 (가), (나), (다)를 모두 만족**한다. 위의 그래프 개형에 맞게 함수 $g(x)$의 식을 세워보자. 가장 큰 특징은 **$y=g(x)$와 $y=M(x-a)$가 $x=\alpha$, $x=\beta$에서 접한다**는 점이다.
따라서 $g(x)-M(x-a)=-(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$로 식을 세울 수 있다.

위의 그래프 개형이 만들어지려면 **$g(x)$가 두 개의 변곡점을 가지므로 $g'(x)$는 두 개의 극점을 가져야 하며 극솟값이 0 이상**이어야 한다. 이를 만족하는 $y=g'(x)$의 그래프 개형은 다음과 같다.

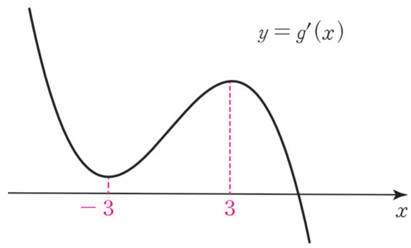


$y=g'(x)$ 그래프에서 $+$**는 $g'(x)>0$로 $g(x)$가 증가하고 있음**을 말하는 것이고 $-$**는 $g'(x)<0$로 $g(x)$가 감소하고 있음**을 말하는 것이다.

$g(x)=-(x-\alpha)^2(x-\beta)^2+M(x-a)$

$g'(x)=-4(x-\alpha)(x-\beta)\left(x-\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)+M$

$g'(x)$의 극솟점을 구하기 위해서는 $g'(x)$를 x에 대해 미분해야 한다.



그래프를 평행이동한다고 극솟값이 바뀌진 않으므로 $\beta-\alpha=6\sqrt{3}$을 이용하여 **계산 편의상 $\alpha=-3\sqrt{3}$, $\beta=3\sqrt{3}$으로 둘 수 있다.**

$g'(x)=-4x(x-3\sqrt{3})(x+3\sqrt{3})+M$
$g''(x)=-12(x-3)(x+3)$

$\alpha=-3\sqrt{3}$, $\beta=3\sqrt{3}$일 때, **$x=-3$에서 $g'(x)$는 극솟값**을 갖는다. $g'(-3)\geq 0$을 만족해야 한다.
$g'(x)=-4x(x-3\sqrt{3})(x+3\sqrt{3})+M$에 $x=-3$을 대입하면 $g'(-3)=-216+M$이다.
$g'(-3)\geq 0$이므로 $M\geq 216$이다. 따라서 M의 최솟값은 216.

※ $\alpha=-3\sqrt{3}$, $\beta=3\sqrt{3}$으로 두는 과정이 마음에 들지 않는다면
직접 $g'(x)=-4(x-\alpha)(x-\beta)\left(x-\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)+k$를 x에 대해 미분하여 $g'(x)$의 극점의 x좌표를 구해도 된다.

※ 수식을 main으로 한 풀이

1. 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$, $x=\beta$에서 극댓값 M을 가지므로 편의상 $p(x)=f(x)-M$이라 하면
$p(x)=f(x)-M=\dfrac{g(x)-M(x-a)}{(x-a)}$ 이다.

$h(x)=g(x)-M(x-a)$라 하자.

$p(x)=\dfrac{h(x)}{x-a}$, $p'(x)=f'(x)=\dfrac{h'(x)(x-a)-h(x)}{(x-a)^2}$이다.
$p(\alpha)=f(\alpha)-M=0$, 마찬가지로 $p(\beta)=0$이고

$p'(\alpha)=f'(\alpha)=0$, 마찬가지로 $p'(\beta)=0$이다.

따라서 $h(\alpha)=h(\beta)=h'(\alpha)=h'(\beta)=0$을 얻는다.

여기서 $h(x)=g(x)-M(x-a)=-(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$을 얻는다.

미분하면, $h'(x)=-(x-\alpha)(x-\beta)(4x-2\alpha-2\beta)$ 이다.

2. $f'(x)$의 분모 부분은 $(x-a)^2$이므로 $x>a$에서 $(x-a)^2>0$이다. $f'(x)$의 분자 부분을 구해보자.

$h'(x)(x-a)-h(x)$

$=-(x-a)(x-\alpha)(x-\beta)(4x-2\alpha-2\beta)+(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$

$=-(x-\alpha)(x-\beta)\{4x^2-2(2a+\alpha+\beta)x+2a(\alpha+\beta)-x^2+(\alpha+\beta)x-\alpha\beta\}$

$=-(x-\alpha)(x-\beta)\{3x^2-(4a+\alpha+\beta)x+2a(\alpha+\beta)-\alpha\beta\}$ 이다.

자, 이제 $3x^2-(4a+\alpha+\beta)x+2a(\alpha+\beta)-\alpha\beta=0$의 근을 구해보자.

계산의 편의상 $\alpha=-3\sqrt{3}$, $\beta=3\sqrt{3}$이라 하자. (단, $\alpha>a$이다.)

$3x^2-4ax+27=0$에서 $x=\dfrac{2a\pm\sqrt{4a^2-81}}{3}$ 이다.

$\dfrac{2a+\sqrt{4a^2-81}}{3}>a$, $\dfrac{2a-\sqrt{4a^2-81}}{3}<a$**이므로**

방정식 $f'(x)=0$은 $x>a$에서 근을 세 개 가진다.

조건 (다)에서 함수 $g(x)$의 극대 또는 극소가 되는 x의 개수는 2 이하임을 알 수 있다.

한편, **함수 $g(x)$는 최고차항의 계수가 -1인 사차함수**인데
함수 $g(x)$의 그래프가 극솟점을 갖는다면 극댓점은 두 개 존재하므로
함수 $g(x)$는 극솟점을 가지지 않는 것 또한 알 수 있다.

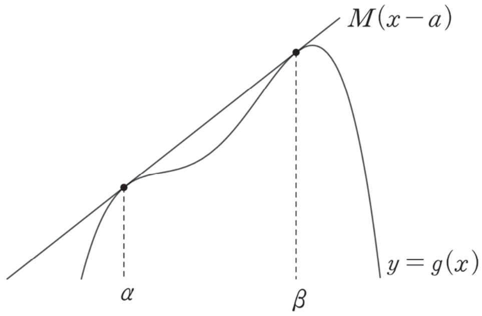
※ $\dfrac{2a+\sqrt{4a^2-81}}{3}>a$, $\dfrac{2a-\sqrt{4a^2-81}}{3}<a$를 보이는 법

$a<-3\sqrt{3}$ **이므로** $a^2>27$, $3a^2>81$**이다.**

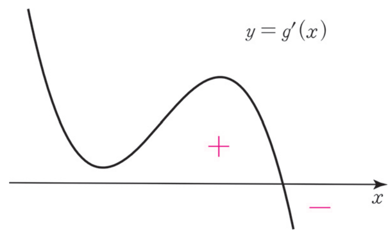
$\sqrt{4a^2-81}>a$이고 $\dfrac{\sqrt{4a^2-81}}{3}>\dfrac{a}{3}$이다. 양변에 $\dfrac{2a}{3}$를 더하면 $\dfrac{2a+\sqrt{4a^2-81}}{3}>a$이다.

$4a^2-81>a^2$에서 $\sqrt{4a^2-81}>-a$이다. 따라서 $-\sqrt{4a^2-81}<a$ 이다.
$\dfrac{-\sqrt{4a^2-81}}{3}<\dfrac{a}{3}$에서 양변에 $\dfrac{2a}{3}$를 더하면 $\dfrac{2a-\sqrt{4a^2-81}}{3}<a$를 얻는다.

3. 함수 $f(x)$의 최댓값은 극댓값인 M이므로 $f(x)\le M$에서 $g(x)\le M(x-a)$이다.
$g(\alpha)=M(\alpha-a)$, $g(\beta)=M(\beta-a)$를 만족하는 함수 $g(x)$를 그려보자.



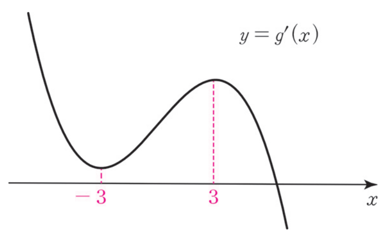
위의 그래프 개형이 만들어지려면 **$g(x)$가 두 개의 변곡점을 가지므로 $g'(x)$는 두 개의 극점을 가져야 하며 극솟값이 0 이상**이어야 한다. 이를 만족하는 $y=g'(x)$의 그래프 개형은 다음과 같다.



$y=g'(x)$ 그래프에서 **$+$는** $g'(x)>0$**로** $g(x)$**가 증가하고 있음**을 말하는 것이고 **$-$는** $g'(x)<0$**로** $g(x)$**가 감소하고 있음**을 말하는 것이다.

$g(x)=-(x-\alpha)^2(x-\beta)^2+M(x-a)$
$g'(x)=-4(x-\alpha)(x-\beta)\left(x-\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)+M$
$g'(x)$의 극솟점을 구하기 위해서는 $g'(x)$를 x에 대해 미분해야 한다.

그래프를 평행이동한다고 극솟값이 바뀌진 않으므로
$\beta-\alpha=6\sqrt{3}$을 이용하여 **계산 편의상**
$\alpha=-3\sqrt{3}$**,** $\beta=3\sqrt{3}$**으로 둘 수 있다.**



$g'(x)=-4x(x-3\sqrt{3})(x+3\sqrt{3})+M$
$g''(x)=-12(x-3)(x+3)$
$\alpha=-3\sqrt{3}$, $\beta=3\sqrt{3}$일 때, **$x=-3$에서 $g'(x)$는 극솟값**을 갖는다.
$g'(-3)\ge 0$을 만족해야 한다.
$g'(x)=-4x(x-3\sqrt{3})(x+3\sqrt{3})+M$에 $x=-3$을 대입하면 $g'(-3)=-216+M$이다.
$g'(-3)\ge 0$이므로 $M\ge 216$이다. 따라서 M의 최솟값은 216.

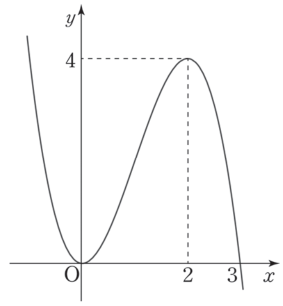
※ $\alpha=-3\sqrt{3}$, $\beta=3\sqrt{3}$으로 두는 과정이 마음에 들지 않는다면
직접 $g'(x)=-4(x-\alpha)(x-\beta)\left(x-\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)+k$를 x에 대해 미분하여 $g'(x)$의
극점의 x좌표를 구해도 된다.

11 17년 7월 교육청 17번

답 : ③

1. **함수 $f(x)$가 $x>0$에서 증가하므로 $x>0$에서 $f'(x)\geq 0$이면 된다.**
   $f'(x)=x-3+\dfrac{k}{x^2}\geq 0$에서 $x^2>0$이므로 양변에 x^2을 곱하여 정리하면 $k\geq -x^3+3x^2$이다.

2. $y=-x^3+3x^2$의 그래프 개형은 다음과 같다.
   $y'=-3x(x-2)$이므로 삼차함수 비율 관계를 이용하면
   $y=-x^3+3x^2$는 $x=2$에서 극대이다.
   따라서 $x>0$에서 $k\geq -x^3+3x^2$를 만족하려면 $k\geq 4$이어야 한다.
   k의 최솟값은 4이다.



12 17년 7월 교육청 20번

답 : ④

1. $g(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{t}{f(t)}dt$**는 정적분으로 정의된 함수이므로** $g(0)=0$, $g'(x)=\dfrac{x}{f(x)}$**을 뽑아낸다.**
   $g(0)=0$**이고 함수** $g'(x)$**는 기함수이므로 함수** $g(x)$**는 우함수이다.**
   또, $g'(x)=\dfrac{x}{f(x)}$**에서** x**는 기함수이므로** $f(x)$**는 우함수이다.** $f(x)=x^2+a$**이다.**
   ※ $g'(-x)=-g'(x)$에서 $\dfrac{-x}{f(-x)}=-\dfrac{x}{f(x)}$이므로 $f(x)=f(-x)$이다.

2. $g''(x)=\dfrac{f(x)-xf'(x)}{\{f(x)\}^2}$에서 $g''(1)=0$이다. $f(1)=f'(1)$을 얻는다.
   $f(1)=a+1$, $f'(1)=2$에서 $a=1$이므로 $f(x)=x^2+1$이다.

3. $g(1)$의 값을 구하자.
   $g(1)=\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{f(t)}dt=\int_0^1 \frac{t}{t^2+1}dt=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2t}{t^2+1}dt=\frac{1}{2}\left[\ln(t^2+1)\right]_0^1=\frac{1}{2}\ln 2$이다.

13 17년 7월 교육청 30번

답 : 71

1. $e^{f(x)}>0$이므로 $g(x)=|f'(x)|e^{f(x)}$는 곧 $g(x)=|f'(x)e^{f(x)}|$이다.
   $y=f'(x)$**는 일차함수이다. 따라서** $f'(x)=0$**은 하나의 근을 가진다.**
   따라서 $g(x)=|f'(x)e^{f(x)}|$**의 극솟값은 0이다.**

   $f'(x)=0$의 근이 함수 $g(x)$의 극소점의 x좌표가 된다.
   조건 (가)에서 함수 $g(x)$**는** $x=2$**에서 극솟값을 가지므로** $f'(2)=0$**이다.**