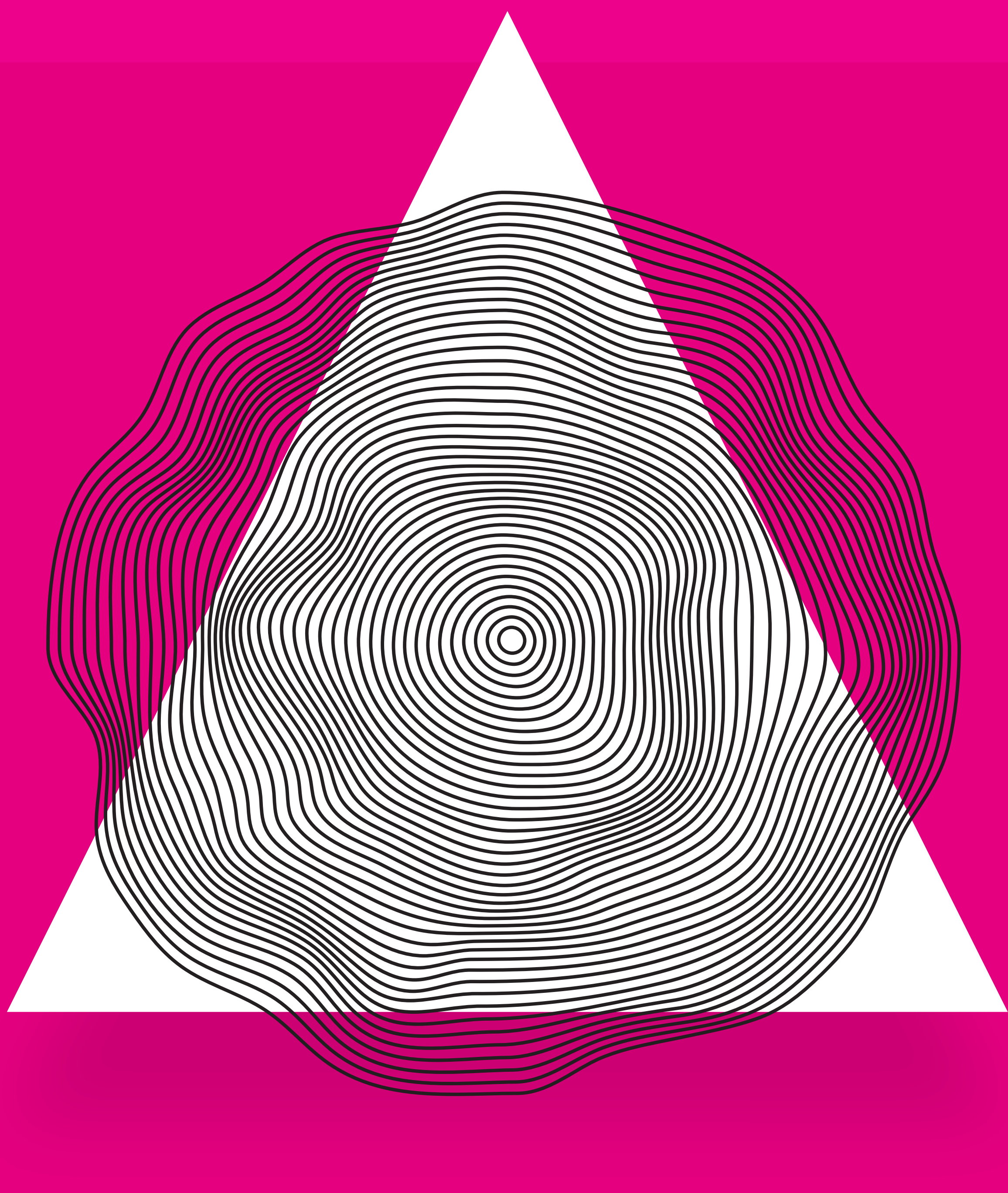
기출의_ 파급효과



smart is sexy
Orbi.kr

기출의 파급효과

수학영역 × 확률과통계 × STANDARD

확률과 통계
STANDARD
기출의 파급효과

확률과 통계

저자의 말

안녕하세요. 오르비 파급효과입니다. 집필한 지 4년째네요. EBS 선별, 기출의 파급효과 시리즈를 통해 큰 사랑을 받았습니다. 여기까지 오는데 너무 과분한 사랑을 주신 분들 너무 감사합니다. 이제 본격적으로 교재 소개를 해보겠습니다.

저는 다음과 같은 교재를 만들었습니다.

1. 기출의 파급효과 standard에는 확률과 통계 기출을 푸는 데 정말 필요한 태도와 도구만을 모두 정리했습니다.

각 Chapter를 나누는 기준이 교과서 목차가 아닌 기출을 푸는 데 정말 필요한 태도와 도구입니다. 기존 개념서들보다 훨씬 얇습니다. 빠르게 실전 개념을 정리할 수 있습니다. 예제 해설까지 꼼꼼히 읽는다면 준킬러, 킬러 문제에서 생각의 틀이 확실히 잡힐 것입니다. 각 Chapter를 '순서대로' 학습하신다면 더욱 큰 학습효과를 기대할 수 있습니다.

2. 최중요 준킬러 이상급의 기출을 기출의 파급효과 standard 칼럼 예제로 들어 칼럼에서 배운 태도와 도구를 바로 활용할 수 있도록 하였습니다.

확률과 통계 기출 중 킬러는 물론 오답률이 높은 문제들을 예제로 들었습니다. 본문 속 태도와 도구가 킬러, 준킬러에서 어떻게 보편적으로 이용되는지 직접 확인한다면 태도와 도구들이 더욱 와닿을 것입니다. 어떠한 한 문제에만 적용되는 특수한 스킬 같은 것이 아닙니다.

예제로 든 평가원 기출을 태도와 도구뿐만 아니라 진화 단계별로도 배치했습니다. 예제들을 '순서대로' 풀다보면 자연스럽게 기출의 진화과정을 느낄 수 있습니다. 기출의 진화과정을 느낀다면 자연스럽게 기출에 대한 태도와 도구들이 정리됩니다. 태도와 도구 정리가 완성되면 최종 진화 형태인 후반부의 최신 기출문제는 혼자 clear 할 수 있고 이에 대한 보람을 느끼실 겁니다.

예전 킬러 문제에 쓰였던 아이디어 2개 이상이 현재의 준킬러, 킬러에 쓰입니다. 수능 때 킬러를 풀 생각이 없어 과거의 킬러를 제대로 학습하지 않는 우를 범한다면 준킬러도 못 풀거나 빨리 풀기 힘듭니다. 따라서 태도와 도구를 기반으로 한 기출의 킬러 학습은 필수입니다.

3. 평가원 문항뿐만 아니라 교육청, 사관학교 문항도 중요한 기출들입니다.

교육청 및 사관학교 문제가 진화한 형태가 평가원에 출제되고 있습니다. 따라서 기존 평가원 기출만을 푸는 것만으로 매년 빠르게 발전하는 수능을 대비하기에는 부족합니다. 하지만 교육청 및 사관학교 문제들까지 모두 풀자니 양이 너무 많습니다.

이를 해결하기 위해 핵심적인 평가원, 교육청, 사관학교 문제를 필요한 만큼만 선별했습니다.
기출의 파급효과 standard에는 평가원, 교육청, 사관학교 기출 중 가장 핵심이 되는 93문제를 담았습니다.

※ 문제 좌표에서 ‘나형’ 또는 ‘A형’ 또는 ‘인문계’라고 표시된 것을 제외하면 전부 ‘가형’ 또는 ‘B형’ 또는 ‘자연계’ 기출입니다.

4. 예제 해설과 유제 해설은 문제를 푸는데에 있어 필요한 생각의 흐름을 매우 자세하게 담았습니다.

예제 해설과 유제 해설은 단계별로 분리되어 있어 이해가 더욱 쉽습니다. 문제에서 필요한 태도와 도구들을 어떻게 쓰는지 과외처럼 매우 자세히 알려줍니다.

5. 더 많은 좋은 기출을 풀어보고 싶은 학생들을 위하여 기출의 파급효과 extension도 준비하였습니다.

기출의 파급효과 extension은 기출에 대한 태도와 도구를 체화하기 시키기 위해 예제보다는 다소 쉬운 유제 159문제로 구성되어 있습니다. extension의 유제는 연도순으로 배치되어있습니다.

standard와의 호환성을 위하여 extension에 담긴 기출 역시 standard의 목차를 따릅니다. **standard를 학습한 학생들이라면 extension을 워크북처럼 이용하시면 됩니다. standard 학습을 하면서 extension도 병행한다면 효과도 배가 될 것입니다.** standard를 잘 학습하셨다면 extension에 담긴 기출도 무리 없이 풀릴 겁니다.

standard를 학습하고 더 이상의 기출보단 n제로 학습하길 희망하는 학생들은 n제로 넘어가셔도 좋습니다. standard로 정말 중요한 기출을 거의 다 본 것이나 마찬가지이기 때문입니다.

짧거나 쉬운 Chapter는 2~3일을 잡으시고 길거나 어려운 Chapter는 6~7일 정도를 잡으시면 됩니다.
이를 따른다면 교재를 빠르면 한 달 내로 늦어도 두 달 내로 완료할 수 있을 것입니다.

개념을 한 번 떼고 쉬운 3~4점 n제(쎈 등등)를 완료한 후 혼자 힘으로 할 수 있는 만큼 기출을 한 번 정도 열심히 풀고 기출의 파급효과를 시작하면 효과가 좋을 것입니다.

9월 평가원을 응시하기 전에 standard와 extension을 ‘제대로’ 1회독을 완료하기만 해도 실력이 부쩍 늘어나 있을 것입니다. 9월 평가원 이후 수능 전까지는 기출의 파급효과에서 잘 안 풀렸던 기출 위주로 다시 풀며 끊임없이 실전 모의고사로 실전 연습을 한다면 수능 때도 분명 좋은 결과가 있을 것입니다.

수학 1등급, 아직 늦지 않았습니다. 마지막으로 한 번쯤 봐야 할 기출, 기출의 파급효과와 함께 합시다.

CHAPTER 02

여사건, 부분 여사건

여사건

경우의 수와 확률 문제의 0순위 유력 후보이다. 전체 사건에서 여사건을 빼서 목표 사건을 구하는 것이다. 잘 알려진 여사건 암시 힌트로는 '적어도~'가 있다. 하지만 꼭 '적어도~'가 나온다고 여사건을 이용할 필요는 없고 '적어도~'가 없어도 여사건 이용이 편할 때도 많다.

여사건을 이용하는 게 더 쉬우려면

1. 전체 사건을 구하기 쉬워야 한다.
2. 여사건 구하기가 목표 사건 구하기보다 쉬워야 한다.

여사건부터 생각해서 손해 볼 거 없다.
경우의 수와 확률 문제에서 여사건을 먼저 생각하고 전체 사건을 구하기 어렵거나 여사건 자체를 구하기 힘들다면 그때만 목표 사건을 직접 구하자.

예제(1) 20학년도 9월 평가원 10번

1부터 7까지의 자연수 중에서 임의로 서로 다른 3개의 수를 선택한다. 선택된 3개의 수의 곱을 a, 선택되지 않은 4개의 수의 곱을 b라 할 때, a와 b가 모두 짝수일 확률은? [3점]

① $\frac{4}{7}$ ② $\frac{9}{14}$ ③ $\frac{5}{7}$ ④ $\frac{11}{14}$ ⑤ $\frac{6}{7}$

1. 1부터 7까지의 자연수 중에서 임의로 서로 다른 3개의 수를 선택하는 경우의 수는 ${}_7\mathrm{C}_3 = 35$가지이다.

2. 여사건이 더 편할까? a, b 모두가 짝수가 되기 위해서는 선택받은 3개의 수 중에 적어도 하나 이상의 짝수가 있어야 하고 선택받지 못한 4개의 수 중에도 적어도 하나 이상의 짝수가 있어야 한다.

‘a, b 모두가 짝수인 사건’의 여사건은 ‘a 또는 b가 홀수인 사건’이다. **여러 숫자들의 곱이 홀수가 되기 위해서는 숫자들이 모두 홀수이면 된다.** 1부터 7까지의 자연수 중에는 짝수가 존재하기에 a, b **모두 홀수가 되는 사건은 있을 수 없다.** 따라서 여사건을 이용하는 것이 훨씬 편하다.

3. ‘a, b 모두가 홀수인 사건’은 없기에 **‘a가 홀수인 사건’과 ‘b가 홀수인 사건’의 경우의 수를 각각 구하여 더한 것이 ‘a, b 모두가 짝수인 사건’의 여사건**이다.

(1) a가 홀수일 때
홀수 1, 3, 5, 7 중 3개의 수를 선택하면 a가 홀수이고 b는 짝수이다. 따라서 a가 홀수인 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_3 = 4$가지이다.

(2) b가 홀수일 때
짝수 2, 4, 6 중 3개의 수를 선택하면 a가 짝수이고 b는 홀수 1, 3, 5, 7의 곱이므로 홀수이다. 따라서 b가 홀수인 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_4 = 1$가지이다.

‘a, b 모두가 짝수인 사건’의 여사건의 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_3 + {}_4\mathrm{C}_4 = 5$가지이다.
따라서 ‘a, b’ 모두가 짝수인 사건’의 경우의 수는 $35 - 5 = 30$가지이다.

4. 1부터 7까지의 자연수 중에서 임의로 서로 다른 3개의 수를 선택할 때, a, b 모두 짝수일 확률은 $\frac{30}{35} = \frac{6}{7}$이므로 **답은 ⑤!!**

comment

여사건부터 생각한 다음, **여사건이 더 힘들다 싶으면 목표 사건을 구하자.**

예제(2) 11학년도 9월 평가원 나형 24번

주머니 안에 스티커가 1개, 2개, 3개 붙어 있는 카드가 각각 1장씩 들어 있다. 주머니에서 임의로 카드 1장을 꺼내어 스티커 1개를 더 붙인 후 다시 주머니에 넣는 시행을 반복한다. 주머니 안의 각 카드에 붙어 있는 스티커의 개수를 3으로 나눈 나머지가 모두 같아지는 사건을 A라 하자.
시행을 6번 하였을 때, 1회부터 5회까지는 사건 A가 일어나지 않고, 6회에서 사건 A가 일어날 확률을 $\frac{q}{p}$라 하자. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

1. **문제 상황파악을 위해** 직접 각 카드에 스티커를 붙이고 각 스티커 수를 3으로 나눈 나머지의 변화를 살펴보자. 카드에 붙어 있는 스티커 수를 3으로 나눈 나머지를 (a, b, c)로 나타내겠다.

0회	$(1,2,0)$								
1회	$(2,2,0)$			$(1,0,0)$			$(1,2,1)$		
2회	$(0,2,0)$	$(2,0,0)$	$(2,2,1)$	$(2,0,0)$	$(1,1,0)$	$(1,0,1)$	$(2,2,1)$	$(1,0,1)$	$(1,2,2)$

2회까지는 사건 A가 발생하지 않는다. 다만, **3회에 스티커를 어느 카드에 붙이냐에 따라 사건 A가 발생할 수 있다.**

2회의 $(2,0,0)$, $(2,0,0)$, $(1,2,2)$의 경우에는 첫 번째 카드에 스티커를, 2회의 $(0,2,0)$, $(1,0,1)$, $(1,0,1)$의 경우에는 두 번째 카드에 스티커를, 2회의 $(2,2,1)$, $(1,1,0)$, $(2,2,1)$의 경우에는 세 번째 카드에 스티커를 붙이면 **3회에 사건 A가 발생한다. 따라서 시행 1회에서 3회까지 사건 A가 일어날 확률은 $\frac{9}{3^3}=\frac{1}{3}$이다.**

2. 3회에 사건 A가 일어나면 안 된다. **시행 1회에서 3회까지 사건 A가 일어나지 않을 확률은 $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$이다.** 3회에 사건 A가 일어나지 않는다면 각 카드에 붙어 있는 스티커 수를 3으로 나눈 나머지는 서로 다르다.

3회에 사건 A가 일어나지 않는다면 0회와 같은 상황이다. 따라서 **4회, 5회에서는 사건 A가 발생하지 않는다. 다만, 6회에 스티커를 어느 카드에 붙이냐에 따라 사건 A가 발생할 수 있다. 시행 4회에서 6회까지 사건 A가 일어날 확률은 $\frac{9}{3^3}=\frac{1}{3}$이다.**

결론적으로 1회부터 5회까지는 사건 A가 일어나지 않고, 6회에서 사건 A가 일어날 확률은 $\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$이다. $p=9, q=2, p+q=11$이므로 **답은 11!!**

comment

시행 1회에서 3회까지 사건 A가 일어나지 않을 확률을 구할 때 여사건을 이용하였기에 Chapter 2의 예시로 넣었지만 이보다 **상황파악을 어떻게 하는지가 더 중요**하다.

상황파악이 쉽게 되지 않는 문제이다. 대다수 경우의 수, 확률 기출에서 상황파악이 비교적 쉬운 것을 고려하면 이 문제는 특이한 문제이다. 하지만 경우의 수, 확률이 어렵게 나온다면 어떤 식으로 나올 수 있는지를 보여준다. 20학년도 6월 평가원에서 경우의 수, 확률이 어렵게 나온 만큼 더욱 주의 깊게 봐야 할 문제이다.

상황파악이 당장 되지 않는다면 귀찮음을 이겨내는 인내심과 용기를 가지고 문제에 나온 설명대로 직접 시행하며 상황을 파악**하자.** 분명 규칙성을 발견할 수 있을 것이다.

예제(3) 21학년도 6월 평가원 19번

두 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $B=\{1,\ 2,\ 3\}$에 대하여 A에서 B로의 모든 함수 f 중에서 임의로 하나를 선택할 때, 이 함수가 다음 조건을 만족시킬 확률은? [4점]

$f(1) \geq 2$이거나 함수 f의 치역은 B이다.

① $\dfrac{16}{27}$ ② $\dfrac{2}{3}$ ③ $\dfrac{20}{27}$ ④ $\dfrac{22}{27}$ ⑤ $\dfrac{8}{9}$

1. **여사건을 사용하자.**
전체의 확률에서 $f(1)<2$ 이고 f의 치역 $\neq B$일 확률을 빼자.

2. $f(1)<2$ 이고 f의 치역 $\neq B$인 사건의 경우의 수를 구해보자.

$f(1)=1$이므로 정의역의 $\{2,\ 3,\ 4\}$에 대응하는 치역은 $\{1\}$ or $\{1,\ 2\}$ or $\{1,\ 3\}$이다.

(1) 정의역의 $\{2,\ 3,\ 4\}$에 대응하는 치역이 $\{1\}$일 때: 경우의 수는 1이다.

(2) 정의역의 $\{2,\ 3,\ 4\}$에 대응하는 치역이 $\{1,\ 2\}$일 때
정의역의 원소인 $2,\ 3,\ 4$**중 적어도 하나는 치역의 원소인** 2**에 대응**해야 하므로 여기서 여사건을 한 번 더 사용하자.

총 경우의 수 2^3에서
정의역의 원소인 $2,\ 3,\ 4$가 모두 치역의 원소인 1에 대응하는 경우의 수는 1이므로
정의역 $\{2,\ 3,\ 4\}$**에 대응하는 치역이** $\{1,\ 2\}$**인 경우의 수는** $2^3-1=7$**이다.**

(3) 정의역 $\{2,\ 3,\ 4\}$에 대응하는 치역이 $\{1,\ 3\}$일 때
정의역 $\{2,\ 3,\ 4\}$에 대응하는 치역이 $\{1,\ 2\}$일 때와 같은 상황이므로
정의역 $\{2,\ 3,\ 4\}$**에 대응하는 치역이** $\{1,\ 3\}$**인 경우의 수는** $2^3-1=7$**이다.**

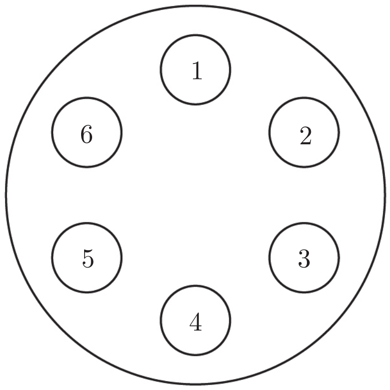
(1), (2), (3)에 의해 전체 $f(1)<2$ 이고 f의 치역 $\neq B$인 사건의 경우의 수는 $1+2\times 7=15$이다.

3. 따라서 구하고자 하는 확률은 $1-\dfrac{15}{3^4}=\dfrac{22}{27}$이다.

답은 ④!!

예제(4) 20년 7월 교육청 20번

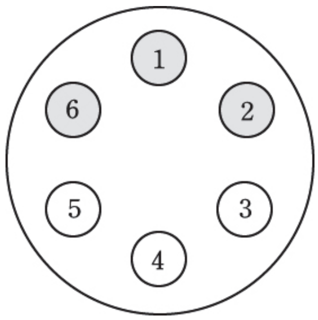
그림과 같이 원탁 위에 1부터 6까지 자연수가 하나씩 적혀 있는 6개의 접시가 놓여 있고 같은 종류의 쿠키 9개를 접시 위에 담으려고 한다. 한 개의 주사위를 던져 나온 눈의 수가 적혀 있는 접시와 그 접시에 이웃하는 양 옆의 접시 위에 3개의 쿠키를 각각 1개씩 담는 시행을 한다. 예를 들어, 주사위를 던져 나온 눈의 수가 1인 경우 6, 1, 2가 적혀 있는 접시 위에 쿠키를 각각 1개씩 담는다. 이 시행을 3번 반복하여 9개의 쿠키를 모두 접시 위에 담을 때, 6개의 접시 위에 각각 한 개 이상의 쿠키가 담겨 있을 확률은? [4점]



① $\frac{7}{18}$　② $\frac{17}{36}$　③ $\frac{5}{9}$　④ $\frac{23}{36}$　⑤ $\frac{13}{18}$

1. 주사위는 총 세 번 던지므로 전체 경우의 수는 6^3이다.

2. 주사위를 한 번 던지면 나오는 눈의 수와 관계없이 3개의 접시가 채워진다.
주사위를 한 번 던졌을 때 나오는 경우의 수는 6이다.
주사위를 한 번 던졌을 때 처음 나온 눈이 1이라 하자.



여사건을 이용하자. 주어진 조건을 만족시키지 않는 경우는 빈 접시가 생기는 경우이다.
두 번째 시행에서 새로 쿠키 담기는 접시 수를 a, 세 번째 시행에서 새로 쿠키 담기는 접시 수를 b라 하자. $a+b<3$일 때, 빈 접시가 생긴다.

순서쌍 (a, b)가 $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(2, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 2)$ 중 하나일 때 빈 접시가 생긴다.

(a, b)	두 번째 나올 수 있는 눈의 수	세 번째 나올 수 있는 경우의 수	경우의 수
$(0, 0)$	1	1	$1\times1=1$
$(1, 0)$	2 or 6	2	$2\times2=4$
$(0, 1)$	1	2	$1\times2=2$
$(2, 0)$	3 or 5	3	$2\times3=6$
$(1, 1)$	2 or 6	2	$2\times2=4$
$(0, 2)$	1	2	$1\times2=2$

따라서 첫 번째 시행에서 나온 주사위의 눈의 수가 1일 때,
세 번의 시행에서 빈 접시가 생기는 경우의 수는 $1+4+2+6+4+2=19$이다.

3. 6개의 접시 위에 각각 한 개 이상의 쿠키가 담겨 있을 확률은
$1-\dfrac{6\times\{1+4+2+6+4+2\}}{6^3}=1-\dfrac{19}{36}=\dfrac{17}{36}$이다.

답은 ②!!

예제(5) 21학년도 사관 9번

다섯 개의 자연수 $1, 2, 3, 4, 5$ 중에서 중복을 허락하여 3개의 수를 택할 때, 택한 세 수의 곱이 6 이상인 경우의 수는? [3점]

① 23 ② 25 ③ 27 ④ 29 ⑤ 31

1. 세 수의 곱은 최소 1, 최대 $5^3 = 125$이다.
   세 수의 곱이 6 이상인 경우의 수보다 세 수의 곱이 6 미만인 경우의 수를 구하기가 쉬워 보인다.

2. **여사건을 활용하자.**
   $1, 2, 3, 4, 5$ 중에서 중복을 허락하여 3개의 수를 택하는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{H}_3$,
   택한 세 수의 곱이 6 미만인 경우의 수는

   곱이 1일 때: (1, 1, 1)
   곱이 2일 때: (1, 1, 2)
   곱이 3일 때: (1, 1, 3)
   곱이 4일 때: (1, 1, 4) , (1, 2, 2)
   곱이 5일 때: (1, 1, 5)

   총 6가지이므로

   구하고자 하는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{H}_3 - 6 = 35 - 6 = 29$이다.

답은 ④!!

예제(6) 21학년도 9월 평가원 나형 8번

네 개의 수 1, 3, 5, 7 중에서 임의로 선택한 한 개의 수를 a라 하고, 네 개의 수 4, 6, 8, 10 중에서 임의로 선택한 한 개의 수를 b라 하자. $1 < \frac{b}{a} < 4$일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{9}{16}$ ③ $\frac{5}{8}$ ④ $\frac{11}{16}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

1. **여사건을 활용하자.** $1 < \frac{b}{a} < 4$의 여사건은 $\frac{b}{a} \leq 1$ or $\frac{b}{a} \geq 4$이다.

(1) $\frac{b}{a} \leq 1$ $(b \leq a)$

$a = 5$일 때 $b = 4$, $a = 7$일 때 $b = 4$ or $b = 6$이므로 경우의 수는 3이다.

(2) $\frac{b}{a} \geq 4$ $(b \geq 4a)$

b의 값에 상관없이 $a = 1$이므로 경우의 수는 4이다.

2. 전체 경우의 수는 $4 \times 4 = 16$이므로 구하고자 하는 확률은 $1 - \frac{7}{16} = \frac{9}{16}$이다.

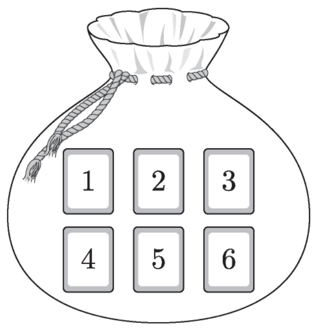
답은 ②!!

예제(7) 21학년도 9월 평가원 나형 19번

1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 두 장의 카드를 동시에 꺼내어 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 넣는 시행을 두 번 반복한다. 첫 번째 시행에서 확인한 두 수 중 작은 수를 a_1, 큰 수를 a_2라 하고, 두 번째 시행에서 확인한 두 수 중 작은 수를 b_1, 큰 수를 b_2라 하자. 두 집합 A, B를

$$A = \{x \mid a_1 \le x \le a_2\},\ B = \{x \mid b_1 \le x \le b_2\}$$

라 할 때, $A \cap B \neq \varnothing$일 확률은? [4점]



① $\frac{3}{5}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{11}{15}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{13}{15}$

1. $A \cap B \neq \varnothing$ **을 직접 구하긴 어렵다. 여사건을 이용하자.**
$A \cap B \neq \varnothing$ 의 여사건은 $A \cap B = \varnothing$ 이다.
$\mathrm{P}(A \cap B \neq \varnothing) = 1 - \mathrm{P}(A \cap B = \varnothing)$를 이용하자.

2. $A \cap B = \varnothing$ 에서 $\{x \mid a_1 \leq x \leq a_2\} \cap \{x \mid b_1 \leq x \leq b_2\} = \varnothing$ 이므로
$b_1 > a_2$ or $a_1 > b_2$ 이다.

$b_1 > a_2$ **인 사건과** $a_1 > b_2$ **인 사건은 서로 대칭이므로 경우의 수가 같다.**
$b_1 > a_2$ 인 사건만 계산하자.

(1) $a_2 = 2$
$a_1 = 1$ 이므로 a_1 을 선택하는 경우의 수는 1,
b_1, b_2를 선택하는 경우의 수는 $3 \leq x \leq 6$에서 두 개를 선택하는 경우의 수이므로 ${}_4\mathrm{C}_2 = 6$이다.
따라서 구하고자 하는 경우의 수는 $1 \times 6 = 6$이다.

(2) $a_2 = 3$
$a_1 = 1$ or $a_1 = 2$ 이므로 a_1 을 선택하는 경우의 수는 2,
b_1, b_2를 선택하는 경우의 수는 $4 \leq x \leq 6$에서 두 개를 선택하는 경우의 수이므로 ${}_3\mathrm{C}_2 = 3$이다.
따라서 구하고자 하는 경우의 수는 $2 \times 3 = 6$이다.

(3) $a_3 = 4$
$a_1 = 1$ or $a_1 = 2$ or $a_1 = 3$ 이므로 a_1 을 선택하는 경우의 수는 3,
b_1, b_2를 선택하는 경우의 수는 $5 \leq x \leq 6$에서 두 개를 선택하는 경우의 수이므로 ${}_2\mathrm{C}_2 = 1$이다.
따라서 구하고자 하는 경우의 수는 $3 \times 1 = 3$이다.

대칭성과 (1), (2), (3)에 의하여 $n(A \cap B = \varnothing) = 2 \times (6 + 6 + 3) = 30$ 이다.

※ a_1, a_2, b_1, b_2의 순서는 $a_1 < a_2 < b_1 < b_2$ 또는 $b_1 < b_2 < a_1 < a_2$로 정해져 있다.
1부터 6까지의 자연수에서 $a_1 < a_2 < b_1 < b_2$를 만족하는 a_1, a_2, b_1, b_2를 정하는 경우의 수는
${}_6\mathrm{C}_4 = 15$이다. $b_1 < b_2 < a_1 < a_2$를 만족하는 a_1, a_2, b_1, b_2를 정하는 경우의 수 역시
${}_6\mathrm{C}_4 = 15$이다.

3. 첫 번째 시행의 경우의 수 = 두 번째 시행의 경우의 수 $= {}_6\mathrm{C}_2$ 이고,
두 사건은 독립이므로 전체 사건의 경우의 수는 ${}_6\mathrm{C}_2 \times {}_6\mathrm{C}_2 = 15 \times 15 = 225$ 이다.

따라서 구하고자 하는 확률은 $1 - \dfrac{30}{225} = \dfrac{13}{15}$ 이다.

답은 ⑤!!

부분 여사건

이 책에서만 편의를 위해 사용하는 단어이다. 부분 여사건은 여사건의 더 디테일한 활용이다.
조건 (가), 조건 (나)가 있고 두 조건 모두를 만족하는 경우의 수를 구한다고 해보자.
(가)$\cap$(나)에 해당하는 경우의 수를 바로 구할 수도 있지만 너무 복잡해지는 경우도 발생한다.
이때, 부분 여사건을 다음과 같이 사용한다.

조건 (가)를 만족시키는 경우의 수에서 조건 (가)는 만족시키지만 조건 (나)는 만족시키지 않는 경우의 수를 뺀다. 집합으로 표현하면 (가)$-${(가)$\cap$(나)^C}에 해당하는 경우의 수를 구하면 된다.

※ 조건 (가)가 사용하기 쉬운 조건이고 조건 (나)가 사용하기 어려운 조건이라면 (가)$-${(가)$\cap$(나)^C}을 이용하고 조건 (나)가 사용하기 쉬운 조건이고 조건 (가)가 사용하기 어려운 조건이라면 (나)$-${(나)$\cap$(가)^C}를 이용한다.

예제(8) 17학년도 수능 27번

다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $a+b+c=7$
(나) $2^a \times 4^b$은 8의 배수이다.

1. **먼저 실수를 방지하기 위해 '음이 아닌 정수'에 동그라미 쳐주자.** 조건 (가)를 만족시키는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_7 = 36$가지이다. 조건 (가)를 만족시키는 경우의 수를 구하는 것은 그리 어렵지 않았다.

2. 조건 (나)를 수식으로 표현하면 $a+2b \geq 3$이다. 항상 '여사건이 더 편할까?'부터 고려한다. **목표 사건을 여사건 없이 맨땅에 헤딩하듯 구하려 하면 a, b로 가능한 경우가 너무 많다는 것을 알 수 있다.** 이렇게 되면 실수가 안 나오는 게 이상하다. 하지만 답을 구하고 검토할 때 이 방법을 쓰는 건 나쁘지 않은 선택이다. **답을 알고 풀면 실수를 해도 금방 알아차린다.**

3. $a+2b < 3$의 경우 a, b**로 가능한 경우가 얼마 없다!** 따라서 조건 (가)를 만족시키면서 조건 (나)는 만족시키지 않는 경우인 (가) ∩ (나)^{C}를 구하고 조건 (가)를 만족시키는 36가지에서 빼면 된다.

   $a+2b=0 \rightarrow (a,b)=(0,0)$

   $a+2b=1 \rightarrow (a,b)=(1,0)$

   $a+2b=2 \rightarrow (a,b)=(2,0),\ (0,1)$

   조건 (가)를 만족시키면서 조건 (나)는 만족시키지 않는 경우인 (가) ∩ (나)^{C}는 4가지이다.
   따라서 조건 (가), 조건 (나)를 동시에 만족시키는 경우의 수는 $36-4=32$가지이다.

   답은 32!!

comment

이 당시, 조건 (나)를 $a+2b \geq 3$가 아닌 '$a+2b$가 3의 배수'로 잘못 해석한 학생들이 많았다.
또한, 많은 학생들이 부분 여사건을 사용하지 않고 목표 사건을 구하려 했기에 엄청난 오답률을 자랑했다. 일단 여사건부터 생각한 다음, 여사건이 더 힘들다 싶으면 목표 사건을 구하자.

예제(9) 19학년도 9월 평가원 28번

방정식 $a+b+c=9$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c) 중에서 임의로 한 개를 선택할 때, 선택한 순서쌍 (a, b, c)가 $a<2$ 또는 $b<2$를 만족시킬 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

1. **먼저 실수를 방지하기 위해 음이 아닌 정수에 동그라미 쳐주자.** $a+b+c=9$를 조건 (가)로 두자. $a+b+c=9$를 만족시키는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_9=55$가지이다.

2. 여사건이 더 편할까? '$a<2$ 또는 $b<2$이다.'를 조건 (나)로 두자. (나)^{C}는 $a \geq 2$, $b \geq 2$를 **동시에 만족시키는 순서쌍 (a, b, c)의 개수이다.** (가)$\cap$(나)를 **만족시키는 순서쌍 (a, b, c)의 개수보다** (가)$\cap$(나)^{C}를 만족시키는 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구하기가 훨씬 쉬워 보인다.

3. (가)$\cap$(나)^{C}는 $a+b+c=9\ (a \geq 2, b \geq 2, c \geq 0)$을 만족시키는 순서쌍 (a, b, c)의 개수이다. ${}_3\mathrm{H}_5=21$가지이다. 따라서 조건 (가), 조건 (나)를 동시에 만족시키는 경우의 수는 $55-21=34$가지이다.

4. 조건 (가)를 만족시키는 순서쌍 (a, b, c) 중 조건 (나)를 만족시키는 순서쌍 (a, b, c)를 고를 확률은 $\frac{34}{55}$이다. $p=55, q=34, p+q=89$이므로 **답은 89!!**

comment

부분 여사건을 이용하면 쉽게 풀린다. 여사건부터 생각한 다음, **여사건이 더 힘들다 싶으면 목표 사건을 구하자.**

예제(10) 18학년도 수능 28번

방정식 $x+y+z=10$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z) 중에서 임의로 한 개를 선택한다. 선택한 순서쌍 (x,y,z)가 $(x-y)(y-z)(z-x) \neq 0$을 만족시킬 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

1. **먼저 실수를 방지하기 위해 음이 아닌 정수에 동그라미 쳐주자.** $x+y+z=10$를 조건 (가)로 두자. $x+y+z=10$를 만족시키는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_{10}=66$가지이다.

2. 여사건이 더 편할까? '$(x-y)(y-z)(z-x) \neq 0$'를 조건 (나)로 두자.
   (나)^{C}는 $x=y$ **또는** $y=z$ **또는** $z=x$**를 만족시키는 순서쌍** (x, y, z)**의 개수이다.**

   $x+y+z=10$**이므로** $x=y=z$**, 즉** $x=y$**,** $y=z$**,** $z=x$**를 동시에 만족할 수는 없다.**
   (가)$\cap$(나)**를 만족시키는 순서쌍** (x, y, z)**의 개수보다** (가)$\cap$(나)^{C}를 만족시키는 순서쌍 (x, y, z)의 개수를 구하기가 훨씬 쉬워 보인다.

3. (가)$\cap$(나)^{C}는 $x=y$ 또는 $y=z$ 또는 $z=x$이며 $x+y+z=10$를 **만족시키는 순서쌍** (x, y, z)**의 개수이다.**

   $x=y$, $x+y+z=10$를 동시에 만족하는 순서쌍 (x, y, z)의 개수를 구해보자.
   이는 곧 $2x+z=10$를 만족하는 순서쌍 (x, z)의 개수를 구하는 것과 같다.
   $2x+z=10$를 만족하는 순서쌍 (x, z)는 $(0, 10)$, $(1, 8)$, $(2, 6)$, $(3, 4)$, $(4, 2)$, $(5, 0)$로 6개이다.

   위와 같은 방법으로 $y=z$, $x+y+z=10$를 만족하는 순서쌍 (x, y, z)의 개수와
   $z=x$, $x+y+z=10$를 만족하는 순서쌍 (x, y, z)의 개수가 모두 각각 6개임을 알 수 있다.

   따라서 (가)$\cap$(나)^{C}에 해당하는 경우의 수는 $6 \times 3 = 18$이다.

4. 조건 (가)를 만족시키는 순서쌍 (x, y, z) 중 조건 (나)를 만족시키는 순서쌍 (x, y, z)를 고를 확률은 $1-\frac{18}{66}=\frac{8}{11}$이다. $p=11, q=8, p+q=19$이므로 **답은 19!!**

comment

부분 여사건을 이용하면 쉽게 풀린다. 여사건부터 생각한 다음, **여사건이 더 힘들다 싶으면 목표 사건을 구하자.**

예제(11) 20학년도 수능 나형 29번

세 명의 학생 A, B, C에게 같은 종류의 사탕 6개와 같은 종류의 초콜릿 5개를 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. [4점]

(가) 학생 A가 받는 사탕의 개수는 1 이상이다.
(나) 학생 B가 받는 초콜릿의 개수는 1 이상이다.
(다) 학생 C가 받는 사탕의 개수와 초콜릿의 개수의 합은 1 이상이다.

1. 세 명의 학생 A, B, C가 받는 사탕의 개수를 각각 a_1, b_1, c_1이라 하고 초콜릿의 개수를 각각 a_2, b_2, c_2라 하자.

조건 (가), 조건 (나)를 모두 만족하기 위해서는 $a_1+b_1+c_1=6\ (a_1 \geq 1, b_1 \geq 0, c_1 \geq 0)$, $a_2+b_2+c_2=5\ (a_2 \geq 0, b_2 \geq 1, c_2 \geq 0)$를 동시에 만족하면 된다.

$a_1+b_1+c_1=6\ (a_1 \geq 1, b_1 \geq 0, c_1 \geq 0)$를 만족하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_5=21$가지이다.
$a_2+b_2+c_2=5\ (a_2 \geq 0, b_2 \geq 1, c_2 \geq 0)$를 만족하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_4=15$가지이다.

따라서 조건 (가), 조건 (나)를 모두 만족하는 경우의 수는 $21 \times 15 = 315$가지이다.

2. (가) ∩ (나)를 조건 (라)라고 하자. 이제 (다) ∩ (라)에 해당하는 사건의 경우의 수를 구하면 된다.
여사건이 더 편할까? **(다)^{C}는 학생 C가 사탕과 초콜릿을 아예 받지 않을 때이다. (다) ∩ (라)를 만족시키는 경우의 수보다** (다)^C ∩ (라)를 만족시키는 경우의 수를 구하기가 훨씬 쉬워 보인다.

3. (다)^C ∩ (라)는 $c_1=c_2=0$이다.
즉, $a_1+b_1=6\ (a_1 \geq 1, b_1 \geq 0)$, $a_2+b_2=5\ (a_2 \geq 0, b_2 \geq 1)$를 동시에 만족하면 된다.

$a_1+b_1=6\ (a_1 \geq 1, b_1 \geq 0)$를 만족하는 경우의 수는 ${}_2\mathrm{H}_5=6$가지이다.
$a_2+b_2=5\ (a_2 \geq 0, b_2 \geq 1)$를 만족하는 경우의 수는 ${}_2\mathrm{H}_4=5$가지이다.

따라서 (다)^C ∩ (라)에 해당하는 경우의 수는 $6 \times 5 = 30$가지이다.

4. (라)에 해당하는 경우의 수는 315가지이고 (다)^C ∩ (라)에 해당하는 경우의 수는 $6 \times 5 = 30$가지이므로 (다) ∩ (라)에 해당하는 경우의 수는 $315-30=285$가지이다.

답은 285!!

comment

부분 여사건을 이용하면 쉽게 풀린다. 조건이 3개씩이나 주어진 상황에서 부분 여사건을 적용하는 신선한 문제였다. 여사건부터 생각한 다음, **여사건이 더 힘들다 싶으면 목표 사건을 구하자.**

예제(12) 22학년도 예비시행 확률과 통계 29번

다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 $a,\ b,\ c,\ d$의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $a+b+c+d=12$
(나) $a \neq 2$이고 $a+b+c \neq 10$이다.

1. 먼저 실수를 방지하기 위해 '음이 아닌 정수'에 동그라미 쳐주자.
   조건 (가)를 만족시키는 경우의 수는 $_4\mathrm{H}_{12}=455$가지이다.
   조건 (가)를 만족시키는 경우의 수를 구하는 것은 그리 어렵지 않았다.

2. 조건 (나)를 보자. **(나)^{C}는 '$a=2$ 또는 $a+b+c=10$'인 사건이다. (가)$\cap$(나)를 만족시키는 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수보다** (가)$\cap$(나)^{C}를 만족시키는 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 구하기가 훨씬 쉬워 보인다.

   $a=2$인 경우의 수는 $b+c+d=10$인 경우의 수이므로 $_3\mathrm{H}_{10}={}_{12}\mathrm{C}_{10}={}_{12}\mathrm{C}_2=66$이다.

   $a+b+c=10$인 경우의 수는 마찬가지로 $_3\mathrm{H}_{10}={}_{12}\mathrm{C}_{10}={}_{12}\mathrm{C}_2=66$이다.

   마지막으로 $a=2$이고 $a+b+c=10$인 경우의 수는 $b+c=8$인 경우의 수이므로
   $_2\mathrm{H}_8={}_9\mathrm{C}_8={}_9\mathrm{C}_1=9$이다.

   따라서 $a=2$이거나 $a+b+c=10$인 사건의 경우의 수는 $2\times66-9=123$이다.

   조건 (가), 조건 (나)를 모두 만족하는 경우의 수는 $455-123=332$이다.

답은 332!!

예제(13) 21학년도 6월 평가원 나형 27번

다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $a+b+c+d=6$ (나) a, b, c, d 중에서 적어도 하나는 0이다.

1. **먼저 실수를 방지하기 위해 '음이 아닌 정수'에 동그라미 쳐주자.** 조건 (가)를 만족시키는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{H}_6=84$가지이다.

2. 여사건이 더 편할까? (나)^C**는** a, b, c, d **모두 자연수인 사건이다. (가)$\cap$(나)를 만족시키는 순서쌍** $(a,\ b,\ c,\ d)$**의 개수보다** (가)$\cap$(나)^{C}를 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수를 구하기가 훨씬 쉬워 보인다.

3. (가)$\cap$(나)^{C}는 $a+b+c+d=6$ $(a\geq 1, b\geq 1, c\geq 1, d\geq 1)$를 동시에 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수이다.

   (가)$\cap$(나)^{C}에 해당하는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{H}_2=10$가지이다.

   따라서 조건 (가), 조건 (나)를 동시에 만족시키는 경우의 수는 $84-10=74$이다.

답은 74!!

예제(14) 20년 7월 교육청 28번

집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$에 대하여 함수 $f: X \rightarrow X$ 중에서 다음 조건을 만족시키는 함수 f의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $f(3) \times f(6)$은 3의 배수이다.
(나) 집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 < x_2$이면 $f(x_1) \leq f(x_2)$이다.

1. 조건 (가)를 만족시키는 집합을 A, 조건 (나)를 만족시키는 집합을 B라 하자.
조건 (나)에서 $f(1) \le f(2) \le f(3) \le f(4) \le f(5) \le f(6)$이므로
$n(B) = {}_6\mathrm{H}_6 = {}_{11}\mathrm{C}_6 = \dfrac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 462$이다.

2. 여사건이 더 편할까? **(가)^{C}는 $f(3) \times f(6)$이 3의 배수가 아닌 사건이다. $f(3) \times f(6)$이 3의 배수가 아니려면 $f(3)$과 $f(6)$가 모두 3의 배수가 아니면 된다. (나)$\cap$(가)를 만족시키는 함수의 개수보다** (나)$\cap$(가)^{C}를 만족시키는 함수의 개수를 구하기가 훨씬 쉬워 보인다.

$n(A \cap B) = n(B) - n(A^C \cap B)$이다.

$n(A^C \cap B)$를 구해보자. $f(3)$**과 $f(6)$이 모두 3의 배수가 아닐 경우의 수를 구하자.**

		$f(1) \le f(2) \le f(3)$	$f(3) \le f(4) \le f(5) \le f(6)$
$f(3)=1$	$f(6)$의 값	1	
	함수의 개수	1	1
	$f(6)$의 값	2	
	함수의 개수	1	${}_2\mathrm{H}_2 = 3$
	$f(6)$의 값	4	
	함수의 개수	1	${}_4\mathrm{H}_2 = 10$
	$f(6)$의 값	5	
	함수의 개수	1	${}_5\mathrm{H}_2 = 15$
$f(3)=2$	$f(6)$의 값	2	
	함수의 개수	${}_2\mathrm{H}_2 = 3$	1
	$f(6)$의 값	4	
	함수의 개수	${}_2\mathrm{H}_2 = 3$	${}_3\mathrm{H}_2 = 6$
	$f(6)$의 값	5	
	함수의 개수	${}_2\mathrm{H}_2 = 3$	${}_4\mathrm{H}_2 = 10$
$f(3)=4$	$f(6)$의 값	4	
	함수의 개수	${}_4\mathrm{H}_2 = 10$	1
	$f(6)$의 값	5	
	함수의 개수	${}_4\mathrm{H}_2 = 10$	${}_2\mathrm{H}_2 = 3$
$f(3)=5$	$f(6)$의 값	5	
	함수의 개수	${}_5\mathrm{H}_2 = 15$	1

$f(3)=1$일 때 함수의 개수는 $1+3+10+15=29$
$f(3)=2$일 때 함수의 개수는 $3+18+30=51$
$f(3)=4$일 때 함수의 개수는 $10+30=40$
$f(3)=5$일 때 함수의 개수는 15이므로

$n\left(A^C \cap B\right)=29+51+40+15=135$이다.

3. $n(A \cap B)=n(B)-n\left(A^C \cap B\right)=462-135=327$이다.

답은 327!!

※ 다른 풀이

1. $f(6)=6$일 때 ${}_6\mathrm{H}_5=252$이다.

2. $f(6) \neq 6$일 때

(1) $f(6)=3$이면 ${}_3\mathrm{H}_5=21$이다.
(2) $f(3)=3$이면 ${}_3\mathrm{H}_2 \times {}_3\mathrm{H}_3=60$이다.
(3) $f(6)=f(3)=3$이면 ${}_3\mathrm{H}_2=6$이다.

(1), (2), (3)에 의해 $21+60-6=75$이다.

따라서 구하고자 하는 함수의 개수는 $252+75=327$이다.

예제(15) 22학년도 9월 평가원 확률과 통계 30번

네 명의 학생 A, B, C, D에게 같은 종류의 사인펜 14개를 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. [4점]

(가) 각 학생은 1개 이상의 사인펜을 받는다.
(나) 각 학생이 받는 사인펜의 개수는 9 이하이다.
(다) 적어도 한 학생은 짝수 개의 사인펜을 받는다.

1. 같은 종류의 사인펜 14 개를 학생 A, B, C, D 에게 남김없이 나누어 줘야 한다.
각 학생은 1 개 이상의 사인펜을 받으므로 1 개의 사인펜을 먼저 분배하자.

구분	A	B	C	D	남은 사인펜
사인펜	1	1	1	1	10

남은 사인펜 10 개를 A, B, C, D 에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는
${}_4\mathrm{H}_{10} = {}_{13}\mathrm{C}_{10} = 286$ 이다.

2. 각 학생이 받는 사인펜의 개수가 9 이하이므로
여사건인 한 명의 학생이 10 개 이상의 사인펜을 받는 경우의 수를 구하자.

네 학생이 받는 사인펜의 개수로 $(11,\ 1,\ 1,\ 1)$, $(10,\ 2,\ 1,\ 1)$이 가능하다.
$(11,\ 1,\ 1,\ 1)$로 분배하는 경우의 수는 $\dfrac{4!}{3!} = 4$이다.
$(10,\ 2,\ 1,\ 1)$로 분배하는 경우의 수는 $\dfrac{4!}{2!} = 12$이다.
조건 (가)를 만족하며 조건 (나)를 만족하지 않는 경우인 (가)$\cap$(나)^{C}는 16이다.

따라서 조건 (가)와 조건 (나)를 동시에 만족시키는 경우인 (가)$\cap$(나)는 $286 - 16 = 270$ 이다.

3. 적어도 한 학생은 짝수 개의 사인펜을 받으므로 **여사건인 모든 학생이 1 개 이상의 홀수 개의 사인펜을 받고, 각 학생이 받는 사인펜의 개수가 9 이하인 경우의 수를 구하자.**

A, B, C, D 가 받는 사인펜의 개수를 각각 a, b, c, d라 하자. $a+b+c+d=14$이다.
$a=2a'+1$, $b=2b'+1$, $c=2c'+1$, $d=2d'+1$로 놓으면 방정식 $a'+b'+c'+d'=5$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c', d'의 순서쌍 $(a',\ b',\ c',\ d')$의 개수와 같으므로
${}_4\mathrm{H}_5 = {}_8\mathrm{C}_5 = {}_8\mathrm{C}_3 = \dfrac{8\times7\times6}{3\times2\times1} = 56$

조건 (나)를 만족시키려면 $(11,\ 1,\ 1,\ 1)$로 분배하는 경우의 수인 4를 제외해야 하므로
(가)$\cap$(나)$\cap$(다)^{C}의 경우의 수는 $56-4=52$이다.

(가)$\cap$(나)$\cap$(다)의 경우의 수는 $270-52=218$ 이다.

답은 218!!