출제 및 해설 : 띵수학 연구실 (정다움, 양민석, 김서천)

공통과목				선택과목					
				확률과 통계		미적분		기하	
문항 번호	정답	문항 번호	정답	문항 번호	정답	문항 번호	정답	문항 번호	정답
1	④	12	⑤	23	⑤	23	③	23	④
2	①	13	⑤	24	③	24	③	24	①
3	④	14	④	25	②	25	①	25	④
4	②	15	④	26	①	26	②	26	②
5	①	16	3	27	②	27	⑤	27	⑤
6	⑤	17	63	28	④	28	④	28	③
7	③	18	5	29	56	29	8	29	13
8	③	19	10	30	100	30	24	30	9
9	④	20	12						
10	②	21	675						
11	①	22	25						

문항의 이용을 원하시거나 모의고사 출제 관련 문의사항이 있으신 경우 math_dding@hanmail.net 로 연락주시기 바랍니다.

공통영역 해설 강의

확률과 통계 해설 강의

미적분 해설 강의

기하 해설 강의

해설강의는 띵수학 유튜브에서 찾아보실 수 있습니다!
https://www.youtube.com/c/띵수학mathdding/playlists

공통과목

1. 정답) ④ [수학Ⅰ 삼각함수]

해설 : $\sin\frac{5}{6}\pi+\cos\frac{5}{3}\pi=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)$

$=\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{3}$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

2. 정답) ① [수학Ⅱ 다항함수의 미분법]

해설 : $f'(x)=3x^2+1$이므로

$f(2)+f'(2)=(2^3+2-2)+(3\times2^2+1)$

$=8+13=21$이다.

3. 정답) ④ [수학Ⅰ 수열의 합]

해설 : $\sum_{n=1}^{6}(kn-2)=k\sum_{n=1}^{6}n-\sum_{n=1}^{6}2$

$=k\times\frac{6\times7}{2}-6\times2$

$=21k-12=30$이므로

$21k=42,\ k=2$이다.

4. 정답) ② [수학Ⅱ 함수의 극한]

해설 : $\lim_{x\to-1-}f(x)+\lim_{x\to1+}f(x)=1+(-2)=-1$이다.

5. 정답) ① [수학Ⅰ 지수와 로그]

해설 : n^2-8n+9의 네제곱근 중 실수인 것이 존재하지 않으므로

$n^2-8n+9<0$이다.

이차방정식 $n^2-8n+9=0$에서

이차방정식의 근의 공식을 이용하면,

$n=4\pm\sqrt{7}$이므로 부등식 $n^2-8n+9<0$의 해는

$4-\sqrt{7}<n<4+\sqrt{7}$이다.

$2<\sqrt{7}<3$이므로 가능한 모든 자연수 n은

2, 3, 4, 5, 6이고, 따라서 가능한 모든 n의 개수는 5이다.

6. 정답) ⑤ [수학Ⅱ 함수의 극한 + 도함수의 활용]

해설 : $\lim_{x\to1}\frac{f(x)+x}{x-1}$의 극한값이 존재하고 분모가 0으로 수렴하므로

$\lim_{x\to1}(f(x)+x)=0$이고, 다항함수 $f(x)$는 연속이므로

$\lim_{x\to1}f(x)=-1=f(1)$이다.

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)+x}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)+1+x-1}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)+1}{x-1}+1$

$=f'(1)+1=3$이므로

$f'(1)=2$이다.

$g(x)=xf(x)$라 하면, $g(1)=f(1)=-1$이고,

$g'(x)=f(x)+xf'(x)$이므로,

$g'(1)=f(1)+f'(1)=-1+2=1$이다.

따라서 곡선 $y=xf(x)$ 위의 점 $(1,\ f(1))$에서의 접선의 방정식은

$y=(x-1)-1=x-2$이다.

따라서 $a=1,\ b=-2$이므로 $a+2b=1-4=-3$이다.

7. 정답) ③ [수학Ⅰ 삼각함수의 그래프]

해설 : (ⅰ) $\cos x+1>0$일 때,

부등식 $(2\sin x-1)(\cos x+1)\geq0$의 양변을 $\cos x+1$로 나누면

$2\sin x-1\geq0,\ \sin x\geq\frac{1}{2}$이고

따라서 $0\leq x\leq2\pi$일 때,

주어진 부등식의 해는 $\frac{\pi}{6}\leq x\leq\frac{5}{6}\pi$이다.

(ⅱ) $\cos x+1=0$일 때,

$(2\sin x-1)(\cos x+1)=0$이므로

부등식 $(2\sin x-1)(\cos x+1)\geq0$는 항상 성립한다.

따라서 $0\leq x\leq2\pi$일 때,

주어진 부등식의 해는 $x=\pi$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $0\leq x\leq2\pi$일 때, 주어진 부등식의 해는

$\frac{\pi}{6}\leq x\leq\frac{5}{6}\pi$ 또는 $x=\pi$이므로

$M=\pi,\ m=\frac{\pi}{6}$이다.

따라서 $M+m=\pi+\frac{\pi}{6}=\frac{7}{6}\pi$이다.

8. 정답) ③ [수학Ⅱ 함수의 연속 + 부정적분]

해설 : 함수 $f(x)$가 $x\neq2$에서만 미분가능하지 않으므로

도함수 $f'(x)$의 한 부정적분이 $f(x)$일 때,

$$f(x)=\begin{cases}x^3-12x+C_1 & (x<2)\\ x^3-12x+C_2 & (x>2)\end{cases}$$

이다. (단, C_1, C_2는 적분상수이다.)

$f(0)=f(4)$이므로

$C_1=64-48+C_2$,

$C_2-C_1=-16$이다. 따라서

$f(3)-f(1)=(3^3-12\times3+C_2)-(1^3-12\times1+C_1)$

$=(C_2-9)-(C_1-11)$

$=C_2-C_1+2=-16+2=-14$이다.

9. 정답) ④ [수학Ⅰ 지수와 로그]

해설 : $\log_a2=\log_b3=\log_c4=t$라 하면,

$a^t=2,\ b^t=3,\ c^t=4$이고, 따라서

$a=2^{\frac{1}{t}},\ b=3^{\frac{1}{t}},\ c=2^{\frac{2}{t}}$이다.

$\log_ac+b=\log_{2^{\frac{1}{t}}}2^{\frac{2}{t}}+b$

$=2+b=11$이므로,

$b=9$이다. 따라서 $t=\log_93=\frac{1}{2}$이고,

$a=2^2=4,\ c=2^4=16$이다. 따라서

$k=\log_{a+c}b=\log_{20}9$이므로

$\frac{1}{k}=\log_920=\frac{1}{2}log_320=\log_32\sqrt{5}$이고,

$3^{\frac{1}{k}}=2\sqrt{5}$이다.

10. 정답) ② [수학Ⅰ 등차수열]

해설 : 4 이상의 자연수 n에 대하여

$a_{n-2}=a_{n-1}-2,\ a_n=a_{n-1}+2$이므로

$S_n=p\times a_{n-2}\times a_n+qn$

$=p\times(a_{n-1}-2)\times(a_{n-1}+2)+qn$

$=p\times\{(a_{n-1})^2-4\}+qn$

이다.

$S_{n-1}=p\times\{(a_{n-2})^2-4\}+q(n-1)$이고,

$a_{n-2}=a_{n-1}-2$이므로

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=p\times(a_{n-1})^2-p\times(a_{n-2})^2+q$

$=p\times\{(a_{n-1})^2-(a_{n-2})^2\}+q$

$=p\times(a_{n-1}+a_{n-2})\times(a_{n-1}-a_{n-2})+q$

$=p\times\{a_{n-1}+(a_{n-1}-2)\}\times\{a_{n-1}-(a_{n-1}-2)\}+q$

$=4p\times(a_{n-1}-1)+q$

이다. $a_n=4p\times a_{n-1}-4p+q$에서 p, q는 상수이므로

$a_n-4p\times a_{n-1}=-4p+q$의 값이 상수이고, 따라서

$(a_{n-1}+2)-4p\times a_{n-1}=(1-4p)a_{n-1}+2$에서

$p=\frac{1}{4}$이고,

$2=-1+q$, $q=3$이다.

따라서 위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각

a, b, c라 하였으므로

$a=4$, $b=-1$, $c=3$이고, $a+b+c=4-1+3=6$이다.

11. 정답) ① [수학Ⅱ 도함수의 활용]

해설 : 점 P의 시각 t $(t\geq 0)$에서의 속도를 $v(t)$라 하면,

$v(t)=t^2-2t-3=(t+1)(t-3)$이다.

따라서 $x=a$ $(a>0)$에서 출발한 점 P는

$0<t<3$일 때, 수직선을 따라 음의 방향으로 이동하고,

시각 $t=3$일 때 방향을 바꾸어

$t>3$일 때, 수직선을 따라 양의 방향으로 이동하므로

점 P가 원점을 한 번 지나기 위해서는

시각 $t=3$일 때의 점 P의 위치가 원점이어야만 한다.

따라서 $0=9-9-9+a$, $a=9$이다.

$t=4$일 때의 점 P의 위치는

$\frac{64}{3}-16-12+9=\frac{7}{3}$이므로 시각 $t=0$에서 $t=4$까지

점 P가 움직인 거리는 $9+\frac{7}{3}=\frac{34}{3}$이다.

12. 정답) ⑤ [수학Ⅰ 수학적 귀납법]

해설 : $a_1=3$, $a_2=1$이므로 제9항까지 수열 $\{a_n\}$을 나열하면,

$a_3=a_2a_1-1=3-1=2$,

$a_4=a_3a_2-1=2\times1-1=1$,

$a_5=a_4a_3-1=1\times2-1=1$,

$a_6=a_5a_4-1=1\times1-1=0$,

$a_7=a_6a_5-1=0\times1-1=-1$,

$a_8=a_7a_6-1=(-1)\times0-1=-1$,

$a_9=a_8a_7-1=(-1)\times(-1)-1=0$

이다.

따라서 2 이상인 자연수 m에 대하여

$a_{3m}=0$, $a_{3m+1}=-1$, $a_{3m+2}=-1$이다.

$\sum_{k=1}^{5}a_k=8$이고, $\sum_{k=3m}^{3m+2}a_k=-2$이므로

$\sum_{k=1}^{5}a_k+\sum_{k=6}^{17}a_k=8+4\times(-2)=0$이다.

$a_{18}=a_{3\times6}=0$, $a_{19}=a_{3\times6+1}=-1$이므로

부등식 $\sum_{k=1}^{n}a_k<0$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 19이다.

13. 정답) ⑤ [수학Ⅱ 도함수의 활용]

해설 : 점 $(1,2)$는 두 직선

$l: y=6x-4$, $m: y=2x$의 교점이다.

따라서 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(1,2)$에서 두 직선

l 또는 m에 접하지 않는다면 함수 $y=f(x)$의 그래프는

두 직선 l, m에 동시에 접할 수 없다.

(i)

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(1,2)$에서 직선 m에 접할 때,

실수 α에 대하여 $f(x)=(x-1)^2(x-\alpha)+2x$라 할 수 있다.

함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 m과도 접해야 하므로

방정식 $f(x)=6x-4$의 근은 $x=1$, 그리고 $x\neq1$인 중근이다.

$(x-1)^2(x-\alpha)+2x=6x-4$,

$(x-1)^2(x-\alpha)-4(x-1)=0$,

$(x-1)(x^2-(\alpha+1)x+\alpha-4)=0$,

$(\alpha+1)^2-4(\alpha-4)=0$,

$\alpha^2-2\alpha+17=0$

이므로 위의 방정식을 만족하는 실수 α는 존재하지 않는다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(1,2)$에서 직선 m에

접할 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 l에 접할 수 없다.

(ii)

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(1,2)$에서 직선 l에 접할 때,

실수 β에 대하여

$f(x)=(x-1)^2(x-\beta)+6x-4$라 할 수 있다.

함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 l과도 접하므로

방정식 $f(x)=2x$의 근은 $x=1$, 그리고 $x\neq1$인 중근이다.

$(x-1)^2(x-\beta)+6x-4=2x$,

$(x-1)^2(x-\beta)+4(x-1)=0$,

$(x-1)(x^2-(\beta+1)x+\beta+4)=0$,

$(\beta+1)^2-4(\beta+4)=0$,

$\beta^2-2\beta-15=0$,

$(\beta-5)(\beta+3)=0$

이므로 $\beta=-3$ 또는 $\beta=5$이고 따라서

$f(x)=(x-1)^2(x+3)+6x-4$ 또는

$f(x)=(x-1)^2(x-5)+6x-4$이다.

따라서 가능한 모든 $f(0)$의 값의 합은

$(-1)+(-9)=-10$이다.

14. 정답) ④ [수학Ⅱ 도함수의 활용 + 정적분]

해설 : ㄱ. $h(x)=\int_{-3}^{x}\{f(t)-g(t)\}dt$의 양변에 $x=-3$을 대입하면

$h(-3)=0$이고, 함수 $y=h(x)$의 그래프가 $x=1$에서 x축에

접하므로 $h(1)=0$이다.

따라서 $h(-3)=h(1)=0$이다. (참)

ㄴ. $h(x)=\int_{-3}^{x}\{f(t)-g(t)\}dt$의 양변을 미분하면

$h'(x)=f(x)-g(x)$이다.

함수 $y=h(x)$의 그래프가 $x=1$에서 x축에 접하므로

$h'(1)=f(1)-g(1)=0$이다.

$x\geq0$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\leq x-2\leq f(x)$에서

$g(x)-x+2\leq0\leq f(x)-x+2$이다.

이 때, $h'(1)=f(1)-g(1)=0$에서

$g(1)+1=0=f(1)+1$이고,

삼차함수 $f(x)-x+2$는 $x=1$에서 극솟값 0을 가지고

이차함수 $g(x)-x+2$는 $x=1$에서 극댓값 0을 가진다.

이에 따라, 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 식은

$f(x)=(x-1)^2(x-b)+x-2$ $(b<1)$

$g(x)=a(x-1)^2+x-2$ $(a<0)$라 나타낼 수 있고

$h'(x)=f(x)-g(x)=(x-1)^2(x-a-b)$이다.

ㄱ에서 $h(-3)=h(1)=0$이고 $h'(1)=0$

이므로 $h(x)$는 최소한 $(x-1)^2$와 $(x+3)$을 인수로 가진다.

이 때, 도함수 $h'(x)=(x-1)^2(x-a-b)$의 식에 따라

$x=1$의 근방에서 $h'(x)$의 증감이 변하지 않으므로

$h(x)$는 $x=1$에서 극값을 가지지 않고

가능한 $h(x)$의 식은 $h(x)=\frac{1}{4}(x-1)^3(x+3)$이다.

$(x-1)^3=x^3-3x^2+3x-1$에서

$\{(x-1)^3\}'=3x^2-6x+3=3(x-1)^2$이고

함수 $h(x)$를 미분하면 곱의 미분법에 의해

$$\begin{aligned}h'(x)&=\frac{3}{4}(x-1)^2(x+3)+\frac{1}{4}(x-1)^3\\&=(x-1)^2\left(\frac{3}{4}x+\frac{9}{4}\right)+(x-1)^2\left(\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}\right)\\&=(x-1)^2(x+2)\end{aligned}$$

가 되므로, 방정식 $h'(x)=0$의 두 실근은 $x=-2,\ 1$이다.

따라서 $h'(x)=0$를 만족시키는 양수 x의 개수는 1이다. (거짓)

ㄷ. $f(x)=(x-1)^2(x-b)+x-2$,

$g(x)=a(x-1)^2+x-2$에서

$$\begin{aligned}f(x)+g(x)&=(x-1)^2(x-b)+a(x-1)^2\\&=(x-1)^2(x+a-b)\end{aligned}$$

이다.

$x\geq0$에 대하여 $g(x)\leq x-2\leq f(x)$이므로

$x=0$을 대입해보면, $g(0)\leq-2\leq f(0)$에서

$a-2\leq-2\leq-b-2$이다.

$a<0$이므로 $a-2\leq-2$는 당연히 성립하고

$-2\leq-b-2$에서 $b\leq0$이다.

ㄴ에서 $h'(x)=(x-1)^2(x-a-b)=(x-1)^2(x+2)$이므로

$a+b=-2$이고,

$$\begin{aligned}f(2)+g(2)&=(2-1)^2(2+a-b)\\&=2+a-b\\&=2+(a+b)-2b\\&=2-2-2b=-2b\end{aligned}$$

이다.

$b \le 0$에서 $f(2)+g(2)=-2b \ge 0$이고

따라서 $f(2)+g(2)$의 최솟값은 0이다. (참)

15. 정답) ④ [수학Ⅰ 지수함수와 로그함수 + 삼각함수의 그래프]

해설 : $f(x)=\log_2\left(\frac{4n^2}{5+4\sin x}\right)$의 값이 자연수가 되기 위해서는

자연수 k에 대하여 $\frac{4n^2}{5+4\sin x}=2^k$이어야 한다.

$1 \le 5+4\sin x \le 9$에서 $\frac{4}{9}n^2 \le \frac{4n^2}{5+4\sin x} \le 4n^2$이고

a_n은 $\frac{4}{9}n^2 \le 2^k \le 4n^2$을 만족시키는 2^k에 대하여

구간 $[0, 2\pi]$에서 $\frac{4n^2}{5+4\sin x}=2^k$인 실수 x의 개수이다.

이 때, 2^k의 값의 범위에 따라 경우를 나누면

구간 $[0, 2\pi]$에서

$\frac{4}{9}n^2=2^k$인 경우, $\sin x=1$이고

어떤 한 자연수 k에 대하여 만족하는 실수 x는 1개다.

$\frac{4}{9}n^2<2^k<\frac{4}{5}n^2$인 경우, $0<\sin x<1$이고

어떤 한 자연수 k에 대하여 만족하는 실수 x는 2개다.

$\frac{4}{5}n^2=2^k$인 경우, $\sin x=0$이고

어떤 한 자연수 k에 대하여 만족하는 실수 x는 3개다.

$\frac{4}{5}n^2<2^k<4n^2$인 경우, $-1<\sin x<0$이고

어떤 한 자연수 k에 대하여 만족하는 실수 x는 2개다.

$4n^2=2^k$인 경우, $\sin x=-1$이고

어떤 한 자연수 k에 대하여 만족하는 실수 x는 1개다.

$\frac{4}{5}n^2=2^k$를 만족하는 자연수 n은 존재하지 않으므로,

임의의 자연수 n, k에 대하여

$\frac{4}{9}n^2=2^k$ 또는 $4n^2=2^k$이면 a_n은 홀수,

$\frac{4}{9}n^2 \ne 2^k$ 이고 $4n^2 \ne 2^k$이면 a_n은 짝수이다.

따라서 a_n이 홀수가 되는 32 이하의 자연수 n은

1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32이다.

세 자연수의 합은 홀수이고, 곱은 짝수가 되려면

세 자연수 중에서 짝수가 2개, 홀수가 1개이어야 하므로

주어진 조건을 만족하는 모든 자연수 m의 값의 합은

$5+7+8+(10+11+12)+(14+15+16)+(22+23+24)+30$

$=197$이다.

16. 정답) 3 [수학Ⅱ 정적분]

해설 : $\int_{-a}^{a}(x^3+2x^2)dx=2\int_0^a 2x^2dx$

$=2\times\left[\frac{2}{3}x^3\right]_0^a$

$=\frac{4}{3}a^3=36$

에서 $a^3=27$이므로 $a=3$이다.

17. 정답) 63 [수학Ⅰ 등비수열]

해설 : 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면,

$a_2=1$이므로

$a_4a_5=a_2r^2\times a_2r^3=r^5$,

$a_3=a_2r=r$이다.

등식 $a_4a_5=4a_3$에서

$r^5=4r$,

$r^4=4$,

$r^2=2$이다.

($\because$ $r^2=-2$를 만족하는 실수 r은 존재하지 않는다.)

따라서 $\sum_{n=1}^{6}a_{2n}=\frac{a_2\{(r^2)^6-1\}}{r^2-1}=\frac{63-1}{2-1}=63$이다.

18. 정답) 5 [수학Ⅱ 도함수의 활용]

해설 : 함수 $f(x)=x^3+kx^2+2x$가 역함수를 가지므로

삼차함수 $f(x)$는 극값을 가지지 않는다.

$f'(x)=3x^2+2kx+2 \ge 0$에서

모든 실수 x에 대하여 부등식

$3x^2+2kx+2 \ge 0$이 성립해야 하므로

$k^2-6 \le 0$,

$-\sqrt{6} \le k \le \sqrt{6}$이다.

$f(1)=k+3$,

$3-\sqrt{6} \le k+3=f(1) \le 3+\sqrt{6}$이고, $2<\sqrt{6}<3$이므로

가능한 모든 정수 n은 1, 2, 3, 4, 5의 5개다.

19. 정답) 10 [수학Ⅰ 지수함수와 로그함수]

해설 : 함수 $f(x)=2^{a-x}+b$는 닫힌구간 $[1,\ 2]$에서 연속이고,

감소하므로 최댓값 $f(1)$, 최솟값 $f(2)$를 갖는다.

$M=f(1)=2^{a-1}+b$, $m=f(2)=2^{a-2}+b$에서

$M+2m=(2^{a-1}+b)+2\times(2^{a-2}+b)$

$=2\times 2^{a-1}+3b=2^a+3b$이다.

$2^a+3b=14$를 만족하는 4 이하의 두 자연수 a, b의 값을

찾으면,

$a=1$일 때 $b=4$,

$a=3$일 때 $b=2$

이므로 가능한 모든 ab의 값의 합은

$1\times4+3\times2=4+6=10$이다.

20. 정답) 12 [수학Ⅱ 함수의 극한 + 도함수의 활용]

해설 : $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{(x-1)f'(x)}$의 극한값이 존재하고,

분모가 0으로 수렴하므로 $f(1)=0$이다.

$f(x)=(x-1)(x^2+ax+b)$라 하면,

$f'(x)=(x^2+ax+b)+(x-1)(2x+a)$이다. 따라서

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{(x-1)f'(x)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+ax+b)}{(x-1)\{(x^2+ax+b)+(x-1)(2x+a)\}}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax+b}{(x^2+ax+b)+(x-1)(2x+a)}$$

에서 $\displaystyle\lim_{x\to1}(x^2+ax+b)\ne0$이면 극한값이 1이 되므로

$\displaystyle\lim_{x\to1}(x^2+ax+b)=1+a+b=0$이다.

따라서 $b=-a-1$이고,

$x^2+ax+b=x^2+ax-a-1=(x-1)(x+a+1)$에서

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{(x-1)f'(x)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax+b}{(x^2+ax+b)+(x-1)(2x+a)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+a+1)}{(x-1)(x+a+1)+(x-1)(2x+a)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x+a+1}{3x+2a+1}$$

이고, $a=-2$이면 극한값이 $\frac{1}{3}$이 되므로 $a\ne-2$이다.

이때, $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{(x-1)f'(x)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to1}\frac{x+a+1}{3x+2a+1}=\frac{a+2}{2a+4}=\frac{1}{2}$임을 알 수 있다.

$f(x)=(x-1)^2(x+a+1)$에서 $f(3)=12$이므로

$f(3)=4(a+4)=12$, $a=-1$이다.

따라서 $f(x)=x(x-1)^2=x^3-2x^2+x$,

$f'(x)=3x^2-4x+1=(3x-1)(x-1)$이므로 함수 $f(x)$는

$x=\frac{1}{3}$에서 극댓값 $k=f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}-1\right)^2=\frac{4}{27}$를 갖는다.

따라서 $81k=81\times\frac{4}{27}=3\times4=12$이다.

21. 정답) 675 [수학Ⅰ 삼각함수의 활용]

해설 : 두 삼각형 ABD, ACD의 외접원의 반지름의 길이가

각각 r_1, r_2이므로 사인법칙을 이용하면

$\angle \mathrm{ADB}=120^\circ$, $\angle \mathrm{ADC}=60^\circ$에서

$\overline{\mathrm{AB}}=2\times r_1\times\sin(\angle\mathrm{ADB})=\sqrt{3}r_1$

$\overline{\mathrm{AC}}=2\times r_2\times\sin(\angle\mathrm{ADC})=\sqrt{3}r_2$이다.

$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{3}r_1:\sqrt{3}r_2=r_1:r_2$이고

$r_1:r_2=7:\sqrt{19}$에서 $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AC}}=7:\sqrt{19}$이다.

이에 따라 $\overline{\mathrm{AB}}=7t$, $\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{19}t$ $(t>0)$ 라 둘 수 있다.

점 D는 선분 BC의 중점이므로 $\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{CD}}=s$라 할 때,

두 삼각형 ABD, ACD에서 각각 코사인법칙을 이용하면

$\overline{\mathrm{AB}}^2=3^2+s^2-2\times3\times s\times\cos(\angle\mathrm{ADB})$,

$\overline{\mathrm{AC}}^2=3^2+s^2-2\times3\times s\times\cos(\angle\mathrm{ADC})$

$\Leftrightarrow$ $49t^2=9+s^2+3s$ ⋯ ㉠

$19t^2=9+s^2-3s$ ⋯ ㉡

이다.

㉠ − ㉡을 하면,

$30t^2=6s$, $t^2=\frac{s}{5}$이고 ㉡에 대입하면,

$\frac{19}{5}s=9+s^2-3s$에서

$5s^2-34s+45=(5s-9)(s-5)=0$이고

$s=5$이다. ($\because\ \overline{AD}<\overline{BD}$)

삼각형 ABC의 넓이는
두 삼각형 ABD, ACD의 넓이의 합과 같으므로

$$k=\frac{1}{2}\times3\times5\times\sin120^\circ+\frac{1}{2}\times3\times5\times\sin60^\circ$$

$=3\times5\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{15\sqrt{3}}{2}$이고, 따라서

$4k^2=4\times\left(\frac{15\sqrt{3}}{2}\right)^2=225\times3=675$이다.

22. 정답) 25 [수학Ⅱ 도함수의 활용 + 정적분의 활용]

해설 : 두 점 A $(1,\ 1)$, P $(t,\ f(t))$에 대하여 직선 AP의 기울기가 $g(t)$이므로, 구간별로 함수 $f(t)$를 구해보면

$t<1$일 때, $\frac{f(t)-1}{t-1}=t+3$

$f(t)=(t+3)(t-1)+1$이다.

$1<t<c$일 때, $\frac{f(t)-1}{t-1}=a$이고

$f(t)=a(t-1)+1$이다.

$t\ge c$일 때, $\frac{f(t)-1}{t-1}=(-t^2+6t-b)$이고

$f(t)=(-t^2+6t-b)(t-1)+1$이다.

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고
$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)=1$이므로 $f(1)=1$이다.

$$f(x)=\begin{cases}(x+3)(x-1)+1 & (x\le1)\\ a(x-1)+1 & (1<x<c)\\ (-x^2+6x-b)(x-1)+1 & (x\ge c)\end{cases}$$

이다.

조건 (가)에 의해, 이차방정식 $-t^2+6t-b=0$의 실근이 존재한다면, 모든 실근은 5 이하이다.

$t^2-6t+b=0$,

$t=3\pm\sqrt{9-b}$

이므로 $b\ge5$일 때, 이차방정식 $-t^2+6t-b=0$의 근이 존재하지 않거나 모든 실근이 5 이하가 되어

조건 (가)를 만족한다.

따라서 $b\ge5$이다.

또, 조건 (나)에 의해,

$\lim_{t\to1-}g(t)=\lim_{t\to1+}g(t)$, $\lim_{t\to c-}g(t)\ne\lim_{t\to c+}g(t)$

또는 $\lim_{t\to c-}g(t)=\lim_{t\to c+}g(t)$, $\lim_{t\to1-}g(t)\ne\lim_{t\to1+}g(t)$

이다.

(ⅰ) $c\ne1$, $\lim_{t\to1-}g(t)=\lim_{t\to1+}g(t)$, $\lim_{t\to c-}g(t)\ne\lim_{t\to c+}g(t)$일 때,

$\lim_{t\to1-}g(t)=\lim_{t\to1+}g(t)$에서 $\lim_{t\to1-}(t+3)=\lim_{t\to1+}a$이므로

$a=4$이고,

$$f(x)=\begin{cases}(x+3)(x-1)+1 & (x\le1)\\ 4(x-1)+1 & (1<x<c)\\ (-x^2+6x-b)(x-1)+1 & (x\ge c)\end{cases}$$

이다.

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$\lim_{x\to c-}f(x)=\lim_{x\to c+}f(x)$,

$4(c-1)+1=(-c^2+6c-b)(c-1)+1$,

$b=-(c-3)^2+5\le5$

인데, $\lim_{t\to c-}g(t)\ne\lim_{t\to c+}g(t)$에서

$4\ne-9+18-b$, $b\ne5$이다.

조건 (가)를 만족하기 위해서는 $b\ge5$이므로
(ⅰ)인 경우 주어진 조건들을 만족할 수 없다.

(ⅱ) $c\ne1$, $\lim_{t\to c-}g(t)=\lim_{t\to c+}g(t)$, $\lim_{t\to1-}g(t)\ne\lim_{t\to1+}g(t)$일 때,

$\lim_{t\to1-}g(t)\ne\lim_{t\to1+}g(t)$이므로, $a\ne4$이다.

$\lim_{t\to c-}g(t)=\lim_{t\to c+}g(t)$이므로,

$a=-c^2+6c-b$,

$b=-(c-3)^2+9-a$이고,

$c\ge6$이면 $a=-c^2+6c-b<0$이므로

a, b가 양수라는 조건에 모순이다.

$c=5$이면, $b=5-a$이고 $a>0$이므로 $b<5$가 되어

조건 (가)를 만족하지 않는다.

따라서 $c=2$ 또는 $c=3$ 또는 $c=4$이다.

$$f(x)=\begin{cases}(x+3)(x-1)+1 & (x\le 1)\\ a(x-1)+1 & (1<x<c)\\ (-x^2+6x-b)(x-1)+1 & (x\ge c)\end{cases}$$

에서

$c=2$이면, $a=8-b$이고, $b\ge 5$이므로

$\int_1^5 f(x)dx$ 의 값은 $a=3$, $b=5$일 때 최대이다.

$\int_1^5 f(x)dx$

$=\int_1^2 (3x-2)dx+\int_2^5(-x^3+7x^2-11x+6)dx$

이다.

$c=3$이면, $a=9-b$이고, $b\ge 5$이므로

$\int_1^5 f(x)dx$ 의 값은 $a=4$, $b=5$일 때 최대이지만

$a\ne 4$라 하였으므로 $a=3$, $b=6$일 때, 최대이다.

$\int_1^5 f(x)dx$

$=\int_1^3 (3x-2)dx+\int_3^5(-x^3+7x^2-12x+7)dx$

이 때, $y=3x-2$에 $y=-x^3+7x^2-12x+7$가 접한다.

$c=4$이면, $a=8-b$이고, $b\ge 5$이므로

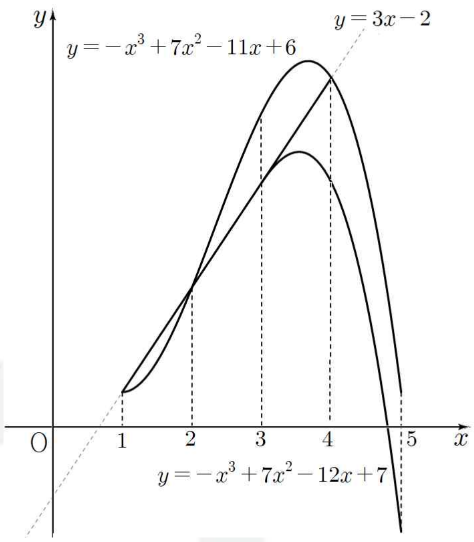
$\int_1^5 f(x)dx$ 의 값은 $a=3$, $b=5$일 때 최대이다.

$\int_1^5 f(x)dx$

$=\int_1^4 (3x-2)dx+\int_4^5(-x^3+7x^2-11x+6)dx$

이다.

그래프를 그려 확인하면,



$\int_1^2 (3x-2)dx+\int_2^5(-x^3+7x^2-11x+6)dx$

$>\int_1^3 (3x-2)dx+\int_3^5(-x^3+7x^2-12x+7)dx$

$>\int_1^4 (3x-2)dx+\int_4^5(-x^3+7x^2-11x+6)dx$

이므로 $c=2$일 때가 $\int_1^5 f(x)dx$ 의 값의 최댓값이다.

따라서 조건을 만족하는 함수 $f(x)$

$$f(x)=\begin{cases}(x+3)(x-1)+1 & (x\le 1)\\ 3(x-1)+1 & (1<x<2)\\ (-x^2+6x-5)(x-1)+1 & (x\ge 2)\end{cases}$$

일 때, $\int_1^5 f(x)dx$ 의 값이 최대이고,

$\sum_{n=1}^{5} f(n)=1+4+9+10+1=25$이다.

확률과 통계

23. 정답) ⑤ [확률과 통계 중복조합과 이항정리]

해설 : ${}_{6}\mathrm{H}_{4}={}_{9}\mathrm{C}_{4}=126$

24. 정답) ③ [확률과 통계 조건부확률]

해설 : 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

두 사건 A^{C}, B도 서로 독립이고

$\mathrm{P}(A^{C}\cap B)=\mathrm{P}(A^{C})\times\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$

$\mathrm{P}(A^{C})=1-\mathrm{P}(A)=\frac{2}{3}$에서 $\mathrm{P}(B)=\frac{3}{4}$이다.

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\times\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$

25. 정답) ② [확률과 통계 중복조합과 이항정리]

해설 : $2x^2$가 2개, $\frac{1}{x}$이 3개 선택될 때, 전개식에서 일차항이 되고

x의 계수는 ${}_{5}\mathrm{C}_{2}\times2^2\times1^3=40$이다.

26. 정답) ① [확률과 통계 확률의 뜻과 활용]

해설 : 전체 경우의 수는 정의역과 공역의 원소가 모두 4개이므로

${}_{4}\Pi_{4}=256$이다.

$f(1)\le f(2)\le f(3)<f(4)$을 만족시키는 경우는

$f(4)$의 값에 따라 경우를 나누어보면

(ⅰ) $f(4)=1$

$f(1)\le f(2)\le f(3)<1$에서 만족시키는 경우가 존재하지 않는다.

(ⅱ) $f(4)=2$

$f(1)\le f(2)\le f(3)<2$에서

1을 중복을 허용해서 3개 골라야 하므로 ${}_{1}\mathrm{H}_{3}={}_{3}\mathrm{C}_{3}=1$이다.

(ⅲ) $f(4)=3$

$f(1)\le f(2)\le f(3)<3$에서

1, 2를 중복을 허용해서 3개 골라야 하므로 ${}_{2}\mathrm{H}_{3}={}_{4}\mathrm{C}_{3}=4$이다.

(ⅳ) $f(4)=4$

$f(1)\le f(2)\le f(3)<4$에서

1, 2, 3을 중복을 허용해서 3개 골라야 하므로

${}_{3}\mathrm{H}_{3}={}_{5}\mathrm{C}_{3}=10$이다.

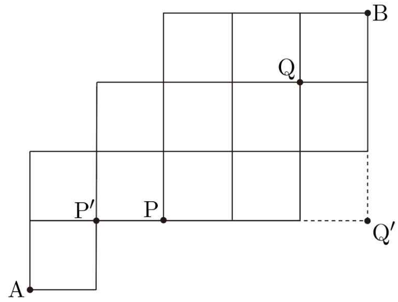
(ⅰ) ~ (ⅳ)에 따라 구하는 확률은 $\frac{1+4+10}{256}=\frac{15}{256}$이다.

27. 정답) ② [확률과 통계 여러 가지 순열]

해설 : 점 A에서 점 P까지 도달하는 경우의 수는

아래 그림의 점 A에서 점 P′까지 도달하는 경우의 수와 같고

이는 $2!=2$이다.



조건을 만족하면서 점 P에서 점 B까지 도달하는 경우의 수는

그림에서 점선으로 그려진 길까지 포함해서

총 $\frac{6!}{3!3!}=20$가지의 경로 중

두 점 Q, Q′을 지나지 않는 경로를 제외하면 되므로

$20-\frac{4!}{2!2!}\times2!-1=7$이다.

위에 따라 구하는 경우의 수는 $2\times7=14$이다.

28. 정답) ④ [확률과 통계 확률의 뜻과 활용]

해설 : 시행이 4번 반복된 후 멈춰야 하므로

4번째 시행까지 꺼내야 할 공의 개수는 6개 또는 7개다.

꺼내야 할 공의 개수가 6개인 경우 가능한 경우는

앞면이 2개, 뒷면이 2개가 나오는 경우이고

이 때, 확률은 독립시행의 확률에 의해

${}_{4}\mathrm{C}_{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$이다.

꺼내야 할 공의 개수가 7개인 경우 가능한 경우는

앞면이 1개, 뒷면이 3개가 나오는 경우이고

4번째 시행은 뒷면이어야 한다.

이 때, 확률은 독립시행의 확률에 의해

${}_3C_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{16}$이다.

구하는 확률은 $\frac{3}{8}+\frac{3}{16}=\frac{9}{16}$이다.

29. **정답)** 56 **[확률과 통계 여러 가지 순열]**

해설 : 숫자를 배열할 때,

3과 4가 이웃하는 경우와 그렇지 않은 경우로 나누면

3과 4가 이웃하는 경우,

나머지 3과 이웃하는 숫자를 5, 6 중에서 하나 고르고

나머지 4와 이웃하는 숫자를 1, 2 중에서 하나 고른다.

이후 고른 숫자 2개와 3, 4를 배열하면

3, 4가 자리를 바꾸는 경우까지 고려해 $2\times2\times2=8$가지이다.

위에서 배열된 숫자 4개를 숫자 배열 A라 하면

남은 숫자 2개와 숫자 배열 A의 순서를 정해주면 되므로

전체 경우의 수는 $8\times3!=48$이다.

3과 4가 이웃하지 않는 경우,

3과 이웃하는 숫자는 5, 6이고, 이를 배열하는 경우의 수는 2다.

4와 이웃하는 숫자는 1, 2이고, 이를 배열하는 경우의 수는 2다.

위에서 배열된 숫자를 각각 숫자 배열 A, B라 하면

두 숫자 배열 A, B의 순서를 정해주면 되므로

전체 경우의 수는 $2\times2\times2=8$이다.

이에 따라 구하는 경우의 수는 $48+8=56$가지이다.

30. **정답)** 100 **[확률과 통계 조건부확률]**

해설 : $9<a+b+c+d<12$에서

가능한 $a+b+c+d$의 값은 10, 11이다.

a, b, c, d는 1 이상 4 이하의 자연수이므로

$a+b+c+d=10$이 되기 위해서 a, b, c, d는

$(1,1,4,4)$, $(1,2,3,4)$, $(1,3,3,3)$, $(2,2,3,3)$, $(2,2,2,4)$

중 하나의 값을 가져야 하고,

$a+b+c+d=11$이 되기 위해서 a, b, c, d는

$(1,2,4,4)$, $(1,3,3,4)$, $(2,2,3,4)$, $(2,3,3,3)$

중 하나의 값을 가져야 한다.

가능한 순서쌍 (a,b,c,d)의 총 개수는

위의 a, b, c, d의 값에서 순서를 정해주면 되므로

$(1,1,4,4)$에서 $\frac{4!}{2!2!}=6$

$(1,2,3,4)$에서 $4!=24$

$(1,3,3,3)$에서 $\frac{4!}{3!}=4$

$(2,2,3,3)$에서 $\frac{4!}{2!2!}=6$

$(2,2,2,4)$에서 $\frac{4!}{3!}=4$

$(1,2,4,4)$에서 $\frac{4!}{2!}=12$

$(1,3,3,4)$에서 $\frac{4!}{2!}=12$

$(2,2,3,4)$에서 $\frac{4!}{2!}=12$

$(2,3,3,3)$에서 $\frac{4!}{3!}=4$개 씩이고

총 $6+24+4+6+4+12+12+12+4=84$개다.

$(a-b)(c-d)<0$을 만족시키는 것이 가능한 경우를 구해보자.

$(a-b)(c-d)<0$인 경우의 수는 $(a-b)(c-d)>0$인 경우의 수와

대칭적인 분포를 이루므로 같다.

(a와 b의 자리, c와 d의 자리만 바꾸면 $(a-b)(c-d)<0$인 경우와

$(a-b)(c-d)>0$인 경우를 하나씩 대응시킬 수 있다.)

위의 9가지 경우 중

$(1,3,3,3)$, $(2,2,2,4)$, $(2,3,3,3)$는

항상 $(a-b)(c-d)=0$이므로 조건을 만족시키지 못한다.

$(2,2,3,3)$, $(1,1,4,4)$는

서로 같은 수가 두 쌍으로 각각 2개씩 있으므로

$(a-b)(c-d)<0$인 경우는 $a\neq b$인 경우의 수의 절반이다.

이 때, $a=b$인 경우가 2개이므로 전체 6개에서

$\frac{6-2}{2}=2$가 $(a-b)(c-d)<0$를 만족하는 경우의 수이다.

케이스가 2개이므로 $2\times2=4$이다.

$(1,\ 2,\ 4,\ 4)$, $(1,\ 3,\ 3,\ 4)$, $(2,\ 2,\ 3,\ 4)$는

서로 같은 수가 2개 있으므로

$(a-b)(c-d)<0$인 경우는

$a\neq b$ 그리고 $c\neq d$인 경우의 수의 절반이다.

이 때, $a=b$인 경우가 2개, $c=d$인 경우가 2개이므로

전체 12개에서

$\frac{12-4}{2}=4$가 $(a-b)(c-d)<0$를 만족하는 경우의 수이다.

케이스가 3개이므로 $3\times 4=12$이다.

$(1,\ 2,\ 3,\ 4)$는 서로 같은 수가 없으므로

$(a-b)(c-d)<0$인 경우는 전체 경우의 수의 절반이다.

전체 24개에서

$\frac{24}{2}=12$가 $(a-b)(c-d)<0$를 만족하는 경우의 수이다.

케이스가 1개이므로 $12\times 1=12$이다.

위에 따라서 $(a-b)(c-d)<0$를 만족시키는 경우의 수는

$4+12+12=28$이다.

가능한 전체 총 경우의 수는 $4^4=256$가지이고,

$9<a+b+c+d<12$을 만족시킬 확률은 $\frac{84}{4^4}$

$9<a+b+c+d<12$이고 $(a-b)(c-d)<0$일 확률은 $\frac{28}{4^4}$이다.

조건부 확률에 따라, $p=\dfrac{\frac{28}{4^4}}{\frac{84}{4^4}}=\frac{1}{3}$이다.

$300p=300\times\frac{1}{3}=100$

미적분

23. 정답) ③ [미적분 여러 가지 미분법]

해설 : $f(x)=\ln(x^2+x+2)$에서

$f'(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x+2}$이고 $f'(1)=\dfrac{2+1}{1^2+1+2}=\dfrac{3}{4}$이다.

24. 정답) ③ [미적분 급수]

해설 : $\sum_{n=1}^{\infty}(na_n-4)=3$에서 $\lim_{n\to\infty}(na_n-4)=0$이고

$\lim_{n\to\infty}na_n=4$이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(3n^2+1)a_n}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n^2+1)\times na_n}{n(2n+1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+1}{n(2n+1)}\times\lim_{n\to\infty}na_n$$

$$=\frac{3}{2}\times 4=6$$

25. 정답) ① [미적분 여러 가지 함수의 미분]

해설 : $6(x-1)^2=\dfrac{a+\cos\pi x}{f(x)}$에서 $f(x)=\dfrac{a+\cos\pi x}{6(x-1)^2}\ (x\neq 1)$이고

실수 전체의 집합에서 함수 $f(x)$가 연속이므로

$\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$이다.

$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\dfrac{a+\cos\pi x}{6(x-1)^2}$에서

분모가 0이므로 분자도 0이고 $a=1$이다.

$\lim_{x\to 1}\dfrac{1+\cos\pi x}{6(x-1)^2}=\dfrac{1}{6}\times\lim_{x\to 1}\dfrac{1+\cos\pi x}{(x-1)^2}$에서

$t=x-1$이라 하면, $t\to 0$ 이고

$$\lim_{x\to 1}\frac{1+\cos\pi x}{6(x-1)^2}=\frac{1}{6}\times\lim_{t\to 0}\frac{1+\cos(\pi t+\pi)}{t^2}$$

$$=\frac{1}{6}\times\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos\pi t}{t^2}$$

$$=\frac{1}{6}\times\lim_{t\to 0}\frac{(1-\cos\pi t)(1+\cos\pi t)}{t^2(1+\cos\pi t)}$$

$$=\frac{1}{6}\times\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2\pi t}{t^2}\times\lim_{t\to 0}\frac{1}{1+\cos\pi t}$$

$$=\frac{1}{6}\times\pi^2\times\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2\pi t}{(\pi t)^2}\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\pi^2}{12}$$

이다. $f(a)=f(1)=\lim_{x\to 1}f(x)=\frac{\pi^2}{12}$이다.

26. 정답) ② [미적분 급수]

해설 : $\overline{B_1C_1}=\overline{B_1E_1}=2$, $\overline{A_1B_1}=\sqrt{3}$, $\angle B_1A_1E_1=\frac{\pi}{2}$에서

$\angle A_1B_1E_1=\frac{\pi}{6}$이고 $\angle C_1B_1E_1=\frac{\pi}{3}$이다.

호 C_1E_1의 이등분점이 D_2이므로 $\angle D_2B_1E_1=\frac{\pi}{6}$이고

부채꼴 $D_2B_1E_1$의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 2^2\times\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$이다.

$\angle D_2B_1C_1=\frac{\pi}{6}$에서 엇각에 의해 $\angle A_2D_2B_1=\frac{\pi}{6}$이고

삼각형 $A_2D_2B_1$는 이등변삼각형이다.

$\overline{B_1D_1}=2$에서 삼각비에 의해 $\overline{A_2B_1}=\overline{A_2D_2}=\frac{2}{3}\sqrt{3}$이고

삼각형 $A_2D_2B_1$의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 2\times\frac{2}{3}\sqrt{3}\times\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$이다.

그림 R_1에 색칠된 부분의 넓이는 $\frac{\pi-\sqrt{3}}{3}$이다.

직사각형 $A_1B_1C_1D_1$와 $A_2B_2C_2D_2$의 길이비는

$\overline{A_1D_1}:\overline{A_2D_2}=2:\frac{2}{3}\sqrt{3}=1:\frac{\sqrt{3}}{3}$이고

넓이비는 이를 제곱한 비인 $1:\frac{1}{3}$이다.

즉, $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\pi-\sqrt{3}}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\right)$이고

$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{\pi-\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{\pi-\sqrt{3}}{2}$이다.

27. 정답) ⑤ [미적분 도함수의 활용]

해설 : $\frac{dx}{dt}=2(t-1)e^{t^2-2t}$, $\frac{dy}{dt}=3t^2-6t+3=3(t-1)^2$이고

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3(t-1)^2}{2(t-1)e^{t^2-2t}}=\frac{3}{2}\times\frac{t-1}{e^{t^2-2t}}=f(t)$이다.

$f'(t)=\frac{3}{2}\times\frac{e^{t^2-2t}-2(t-1)^2e^{t^2-2t}}{\left(e^{t^2-2t}\right)^2}=\frac{3}{2}\times\frac{1-2(t-1)^2}{e^{t^2-2t}}$에서

도함수의 증감이 바뀌는 t는 $2(t-1)^2=1$이고

이 때 극대 혹은 극소이므로 $(a-1)^2=\frac{1}{2}$이다.

28. 정답) ④ [미적분 수열의 극한]

해설 : 선분 AB를 지름으로 하는 원 위에 점 O와 C가 있으므로

원주각의 성질에 의해 $\angle AOB=\angle ACB=\frac{\pi}{2}$이다.

이에 따라, 먼저 두 직선 OA와 OB가 수직이므로

두 직선의 기울기의 곱이 -1이다.

점 B의 좌표를 $\left(a_n,\,(a_n)^2\right)$이라 할 때,

직선 OA의 기울기는 $\frac{4n^2}{-2n}=-2n$이고,

직선 OB의 기울기는 $\frac{(a_n)^2}{a_n}=a_n$이므로

$-2n\times a_n=-1$에서 $a_n=\frac{1}{2n}$이다.

똑같이 두 직선 AC와 BC도 수직이므로

두 직선의 기울기의 곱이 -1이다.

점 C의 좌표를 $(0,\,b_n)$이라 할 때,

직선 AC의 기울기는 $\frac{4n^2-b_n}{-2n}$이고,

직선 BC의 기울기는 $\frac{\frac{1}{4n^2}-b_n}{\frac{1}{2n}}=\frac{1-4n^2b_n}{2n}$이므로

$\frac{4n^2-b_n}{-2n}\times\frac{1-4n^2b_n}{2n}=-1$에서

$4n^2(b_n)^2-(1+16n^4)b_n=0$, $b_n=\frac{1}{4n^2}+4n^2$이다.

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_nb_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+\frac{1}{8n^3}}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{8n^4}\right)=2$

29. 정답) 8 [미적분 여러 가지 함수의 미분]

해설 : 그림의 반원의 반지름을 $r(\theta)$라 하면

$\angle DAB=\frac{\theta}{2}$에서 삼각비에 의해 $\overline{OA}=r(\theta)\csc\frac{\theta}{2}=\frac{r(\theta)}{\sin\frac{\theta}{2}}$

$\angle DBA=2\theta$에서 삼각비에 의해 $\overline{OB}=r(\theta)\csc 2\theta=\frac{r(\theta)}{\sin 2\theta}$

이다. $\overline{OA}+\overline{OB}=\overline{AB}=1$에서

$$r(\theta)\left(\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}+\frac{1}{\sin 2\theta}\right)=r(\theta)\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}+\sin 2\theta}{\sin\frac{\theta}{2}\sin 2\theta}\right)=1$$

$r(\theta)=\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}\sin 2\theta}{\sin\frac{\theta}{2}+\sin 2\theta}$ 이다.

삼각형 ABC에 사인 법칙을 적용하면

$\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin 2\theta}=\dfrac{1}{\sin(\pi-3\theta)}$에서, $\overline{\mathrm{AC}}=\dfrac{\sin 2\theta}{\sin(\pi-3\theta)}=\dfrac{\sin 2\theta}{\sin 3\theta}$이다.

$\angle\mathrm{DAB}=\dfrac{\theta}{2}$에서 삼각비에 의해 $\overline{\mathrm{AE}}=r(\theta)\cot\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{r(\theta)}{\tan\frac{\theta}{2}}$

이고, $f(\theta)=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{AE}}\times\sin\dfrac{\theta}{2}$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{\sin 2\theta}{\sin 3\theta}\times\frac{r(\theta)}{\tan\frac{\theta}{2}}\times\sin\frac{\theta}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{\sin 2\theta\cos\frac{\theta}{2}}{\sin 3\theta}\times r(\theta)$$

이다. 반원의 넓이는 $g(\theta)=\dfrac{1}{2}\times\pi\times\{r(\theta)\}^2$이고

$\dfrac{g(\theta)}{\theta\times f(\theta)}=\dfrac{\frac{1}{2}\times\pi\times\{r(\theta)\}^2}{\theta\times\frac{1}{2}\times\frac{\sin 2\theta\cos\frac{\theta}{2}}{\sin 3\theta}\times r(\theta)}=\dfrac{\pi r(\theta)\times\sin 3\theta}{\theta\times\sin 2\theta\cos\frac{\theta}{2}}$ 이다.

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin 3\theta}{\sin 2\theta}=\frac{3}{2},\quad \lim_{\theta\to0+}\frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}}=1$$

$\displaystyle\lim_{\theta\to0+}\frac{r(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\frac{\theta}{2}\sin 2\theta}{\theta\left(\sin\frac{\theta}{2}+\sin 2\theta\right)}=\frac{1}{\frac{5}{2}}=\frac{2}{5}$에서

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta\times f(\theta)}=\pi\lim_{\theta\to0+}\frac{r(\theta)}{\theta}\times\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin 3\theta}{\sin 2\theta}\times\lim_{\theta\to0+}\frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$=\pi\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{2}\times1=\frac{3}{5}\pi$$

이고, $p+q=3+5=8$이다.

30. 정답) 24 [미적분 도함수의 활용]

해설 : 함수 $g(x)=-\{4+f(x)\}e^{-f(x)}$를 미분해보면

$g'(x)=f'(x)\{3+f(x)\}e^{-f(x)}$이고

함수 $g(x)$가 극대 혹은 극소가 될 수 있는 x는

$f'(x)=0$이거나 $3+f(x)=0$인 x중 도함수 증감이 바뀌는 x이다.

이 때, 이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 p라 하면

이차함수 $f(x)$를 극값의 유무를 기준으로

1) $p>0$, $3+f(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가짐

2) $p<0$, $3+f(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가짐

3) $p>0$, $3+f(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지지 않음

4) $p<0$, $3+f(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지지 않음

로 나눌 수 있다.

이 때, 3), 4)에서는 $g'(x)=f'(x)\{3+f(x)\}e^{-f(x)}$에서

$f'(x)=0$인 x의 근처에서 $-\to+$로 증감이 바뀌므로

함수 $g(x)$가 극솟값만을 가지므로 조건 (가)에 모순이다.

1), 2)에서는 $g'(x)=f'(x)\{3+f(x)\}e^{-f(x)}$에서

$f'(x)=0$인 x의 근처에서 $+\to-$로 증감이 바뀌므로

$f'(x)=0$인 x에서 극댓값을 가지고,

$3+f(x)=0$인 x의 근처에서 $-\to+$로 증감이 바뀌므로

$3+f(x)=0$인 x에서 극솟값을 가진다.

이 때, $f'(x)=0$은 일차방정식이므로 극댓값은 1개,

$3+f(x)=0$는 서로 다른 두 근을 가지므로 극솟값은 2개다.

x가 양의 무한대와 음의 무한대로 발산할 때를 각각 살펴보면

1)의 경우

$x\to\infty$일 때, $f(x)\to\infty$이고 $g(x)\to0-$

$x\to-\infty$일 때, $f(x)\to\infty$이고 $g(x)\to0-$

2)의 경우

$x\to\infty$일 때, $f(x)\to-\infty$이고 $g(x)\to\infty$

$x\to-\infty$일 때, $f(x)\to-\infty$이고 $g(x)\to\infty$

이다.

2)의 경우 $g(x)$가 발산하므로 $g(x)$의 최댓값이 존재하지 않는다.

1)의 경우 극댓값이 0 이상이면 (가) 조건을 만족시킬 수 있다.

즉, 1)의 경우가 조건을 만족시키는 상황이고

함수 $g(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 M을 가진다.

이에 따라, $f'(-1)=0$이고, $f(x)=p(x+1)^2+q$라 둘 수 있다.

극댓값이 0 이상이어야 하므로 $g(-1)\geq 0$에서

$$g(-1)=-\{4+f(-1)\}e^{-f(-1)}$$
$$=-(4+q)e^{-q}\geq 0$$

이고 $q\leq -4$이다.

(나) 조건에서 $g'(n_1)g'(n_2)<0$을 만족시키는 n_1, n_2가 존재하지 않으므로 모든 n_1, n_2에 대하여 $g'(n_1)g'(n_2)\geq 0$이다.

$g'(x)=f'(x)\{3+f(x)\}e^{-f(x)}$에서

$x>-1$인 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이고., $e^{-f(x)}>0$이므로

자연수 n에 대하여 $g'(n)$의 부호는 $3+f(n)$의 부호와 같다.

모든 n_1, n_2에 대하여 $g'(n_1)g'(n_2)\geq 0$이려면

모든 자연수 n에 대하여 $3+f(n)$의 부호가 0 이상이거나

모든 자연수 n에 대하여 $3+f(n)$의 부호가 0 이하여야 한다.

이 때, $f(x)=p(x+1)^2+q$에서 $p>0$이므로

모든 자연수 n에 대하여 $3+f(n)$의 부호가 0 이상이어야 한다.

이차함수 $f(x)$는 $x>-1$에서 증가하므로

$f(1)<f(2)<f(3)<\cdots$이고

$3+f(1)<3+f(2)<3+f(3)<\cdots$에서

$3+f(1)\geq 0$이면 모든 자연수 n에 대하여 $3+f(n)\geq 0$이다.

$3+f(1)=4p+q+3\geq 0$에서, $-4p-3\leq q$이다.

(가)와 (나)에서 얻은 q의 범위를 합쳐보면

$-4p-3\leq q\leq -4$이다.

$f'(0)=2p$의 값이 최소인 경우는 $p>0$에서 $p=1$일 때이고,

위 범위에 $p=1$을 대입하면 $-7\leq q\leq -4$이다.

위에서 구했었듯이 $M=g(-1)=-(4+q)e^{-q}$이고,

가능한 모든 M의 값은 0, e^5, $2e^6$, $3e^7$이고,

가능한 모든 양수 M의 값의 곱은 $e^5\times 2e^6\times 3e^7=6e^{18}$이다.

$a+b=6+18=24$

기하

23. 정답) ④ [기하 평면벡터의 연산]

해설 : $\vec{a}+2\vec{b}=(3+2\times 2,\ 2+2\times(-4))=(7,\ -6)$이고

모든 성분의 합은 $7-6=1$이다.

24. 정답) ① [기하 평면벡터의 성분과 내적]

해설 : 직선 l의 방향벡터는 $(2,\ 4)$이고, 직선 m의 방향벡터는 $(1,\ 3)$이다.

이에 따라 $\cos\theta=\dfrac{14}{\sqrt{2^2+4^2}\sqrt{1^2+3^2}}=\dfrac{7}{5\sqrt{2}}$이고

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에서 $\sin\theta=\dfrac{1}{5\sqrt{2}}$이다.

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{1}{5\sqrt{2}}}{\frac{7}{5\sqrt{2}}}=\frac{1}{7}$$

25. 정답) ④ [기하 이차곡선]

해설 : 두 양수 a, b에 대하여 $\overline{\mathrm{FP}}=a$, $\overline{\mathrm{F'P}}=b$라 하면

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$의 주축이 4이므로

$|a-b|=4$, $ab=12$에서

$(a-b)^2+4ab=(a+b)^2=64$, $a+b=8$이다.

쌍곡선의 두 초점이 $(-3,\ 0)$, $(3,\ 0)$이므로 $\overline{\mathrm{FF'}}=6$이고

삼각형 $\mathrm{FPF'}$의 둘레의 길이는

$\overline{\mathrm{FF'}}+\overline{\mathrm{FP}}+\overline{\mathrm{F'P}}=6+a+b=14$이다.

26. 정답) ② [기하 평면벡터의 성분과 내적]

해설 : $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BE}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}$에서

$$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{BE}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}|$$
$$=|\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}|$$

이고, $\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}$에서 $|\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{BE}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}|$

$$=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}|=3$$

이다.

$\overrightarrow{\mathrm{DE}}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}}$에서 $\overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DE}}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AE}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}})=0$

$|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|^2=\overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}$이다.

$$|\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}|^2=|\overrightarrow{AD}|^2+2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}+|\overrightarrow{AE}|^2$$
$$=|\overrightarrow{AD}|^2+3\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}$$
$$=3+3\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}=9$$

에서 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}=2$이다.

27. 정답) ⑤ [기하 평면벡터의 성분과 내적]

해설 : 중심이 O_1인 원 위에 $\overrightarrow{O_2B}=\overrightarrow{O_1B'}$를 만족시키는 점 B'을 잡으면

$\overrightarrow{O_1A}\cdot\overrightarrow{O_2B}=\overrightarrow{O_1A}\cdot\overrightarrow{O_1B'}=14$이다.

이 때, 위 내적값이 일정하므로

두 벡터 $\overrightarrow{O_1A}$, $\overrightarrow{O_1B'}$가 이루는 각의 크기가 일정하고

점 A에서 선분 O_1B'에 내린 수선의 발을 H라 할 때,

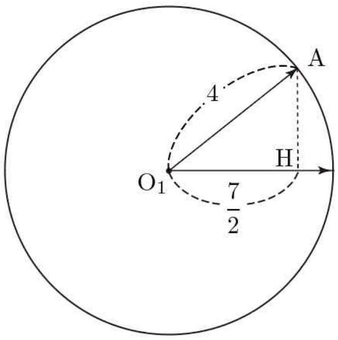
$\overrightarrow{O_1A}\cdot\overrightarrow{O_1B'}=14$에서

$$\overrightarrow{O_1A}\cdot\overrightarrow{O_1B'}=|\overrightarrow{O_1A}||\overrightarrow{O_1B'}|\cos\theta\quad(\theta=\angle AO_1B)$$
$$=|\overrightarrow{O_1A}||\overrightarrow{O_1H}|$$
$$=4|\overrightarrow{O_1H}|=14$$

이고, $\overline{O_1H}=\frac{7}{2}$이다.

이에 따라 두 벡터 $\overrightarrow{O_1A}$, $\overrightarrow{O_1B'}$가 이루는 예각의 크기 θ가

$\cos\theta=\frac{7}{8}$인 상태로, 두 점 A, B'는 원 위에서 움직인다.



$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AO_1}+\overrightarrow{O_1O_2}+\overrightarrow{O_2B}|$에서

$\overrightarrow{AO_1}+\overrightarrow{O_2B}$는 방향은 자유롭고

크기는 위 그림의 $|\overrightarrow{AB'}|$와 같다.

$\overline{AH}=\frac{\sqrt{15}}{2}$, $\overline{B'H}=\frac{1}{2}$에서 $|\overrightarrow{AB'}|=2$이므로

$\overrightarrow{AO_1}+\overrightarrow{O_2B}$의 크기는 2이다.

(가)에서 $|\overrightarrow{O_1O_2}|=4$이고, $\overrightarrow{AO_1}+\overrightarrow{O_2B}$가 방향이 자유로우므로

$4-2\le|\overrightarrow{AO_1}+\overrightarrow{O_1O_2}+\overrightarrow{O_2B}|\le 4+2$에서 최댓값은 6이다.

28. 정답) ③ [기하 이차곡선]

해설 : $\overline{BF}=k$라 할 때, $\overline{AF}=3k$이다.

이 때, 포물선의 정의에 의해

두 점 A, B에서 포물선의 준선까지의 거리도 각각 k, $3k$이다.

포물선의 준선이 $x=-1$이므로

점 A의 x좌표는 $3k-1$, 점 B의 x좌표는 $k-1$이다.

점 A의 y좌표를 y_1, 점 B의 y좌표를 y_2라 할 때,

$(y_1)^2=4(3k-1)$, $(y_2)^2=4(k-1)$이다.

$\overline{AB}^2=(3k-1-k+1)^2+(y_2-y_1)^2=4k^2+(y_2-y_1)^2$이고

이 때, 직각삼각형 ABF에 대하여

$\overline{AB}^2=\overline{AF}^2-\overline{BF}^2=(3k)^2-k^2=8k^2$이다.

위 두 식에 따라 $\overline{AB}^2=4k^2+(y_2-y_1)^2=8k^2$에서

$(y_2-y_1)^2=4k^2$, $y_1-y_2=2k$이다.

$(y_1)^2-(y_2)^2=(y_1-y_2)(y_1+y_2)=4(3k-1-k+1)=8k$에서

$y_1+y_2=4$이고, $y_1-y_2=2k$와 연립하면

$y_1=2+k$, $y_2=2-k$이다.

$(y_2)^2=4(k-1)$에서 $y_2=2-k$를 대입하면

$(2-k)^2=4(k-1)$, $k^2-8k+8=0$

$k=4-2\sqrt{2}$이다. ($\overline{BF}<4$)

삼각형 ABF의 둘레의 길이는

$\overline{AB}+\overline{BF}+\overline{FA}=(4+2\sqrt{2})k=(4+2\sqrt{2})(4-2\sqrt{2})=8$

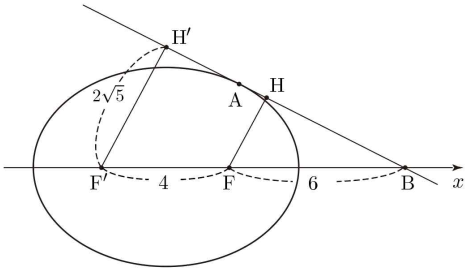
29. 정답) 13 [기하 이차곡선과 직선]

해설 : 직선 l이 x축과 만나는 점을 B라 할 때,

두 삼각형 BF′H′와 BFH는 서로 닮음이고

$\overline{F'H'}=\frac{5}{3}\overline{FH}$에서 닮음비는 5 : 3이다.

이 때, 아래 그림과 같이 $\overline{FF'}=4$이므로 $\overline{BF}=6$이다.



피타고라스 정리에 의해 $\overline{BH'}=\sqrt{10^2-(2\sqrt{5})^2}=4\sqrt{5}$이고,

삼각비에 의해 직선 l의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이다.

또, 점 B는 $(8,\ 0)$이고 직선 l의 방정식은 $y=-\frac{1}{2}x+4$이다.

타원 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 한 점 $A(x_1,\ y_1)$에서의

접선의 방정식은 기울기가 $-\frac{1}{2}$일 때,

$y=-\frac{1}{2}x+\sqrt{\frac{a^2}{4}+b^2}$이고, 이에 따라 $\frac{a^2}{4}+b^2=16$이다.

한 초점이 $F(2,\ 0)$이므로 $a^2-b^2=4$이고 두 식을 연립하면

$a^2=16,\ b^2=12$이다.

타원 $C:\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ 위의 한 점 $A(x_1,\ y_1)$에서의

접선의 방정식은 $\frac{x_1x}{16}+\frac{y_1y}{12}=1$ 에서 $y=-\frac{3x_1x}{4y_1}+\frac{12}{y_1}$ 이고

역시 이 식도 $y=-\frac{1}{2}x+4$이므로 $x_1=2,\ y_1=3$이다.

$2x_1+3y_1=2^2+3^2=13$

30. 정답) 9 [기하 평면벡터의 성분과 내적]

해설 : $2\overrightarrow{PX}=\overrightarrow{PC}+5\overrightarrow{PD}$에서 점 X의 자취를 구해보면

$2\overrightarrow{XP}+\overrightarrow{PC}+5\overrightarrow{PD}=0$에서 $2\overrightarrow{XD}+\overrightarrow{PC}+3\overrightarrow{PD}=0$이고

식을 정리하면

$2\overrightarrow{DX}=\overrightarrow{PC}+3\overrightarrow{PD}$, $\frac{1}{2}\overrightarrow{DX}=\frac{\overrightarrow{PC}+3\overrightarrow{PD}}{4}$이다.

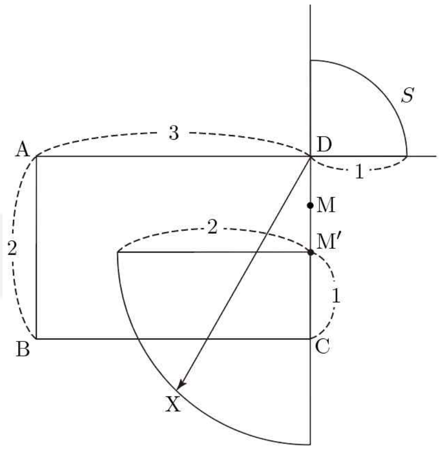
이 때, 점 C와 점 D의 $3:1$ 내분점을 점 M이라 할 때,

$\frac{1}{2}\overrightarrow{DX}=\frac{\overrightarrow{PC}+3\overrightarrow{PD}}{4}=\overrightarrow{PM}$이다.

$\overrightarrow{DX}=2\overrightarrow{PM}$에서 $\overrightarrow{DX}=2\overrightarrow{PD}+2\overrightarrow{DM}$

$=2\overrightarrow{DM}-2\overrightarrow{DP}$

이다. 이를 그림으로 나타내면 아래와 같다.



점 C와 점 D의 중점을 M′라 할 때, 점 X는 위 그림과 같이

중심이 M′이고 반지름이 2인 사분원의 호에 위치한다.

(이 때, 사분원의 방향은 사분원 S와 반대방향이다.)

점 X에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 X′이라 할 때,

$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BX}=|\overrightarrow{BD}||\overrightarrow{BX}|\cos\theta\ \ (\theta=\angle XBD)$

$=|\overrightarrow{BD}||\overrightarrow{BX'}|$

이고, $|\overrightarrow{BD}|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$에서

$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BX}=\sqrt{13}\,|\overrightarrow{BX'}|$이다.

즉, $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BX}$가 최소인 상황은 선분 BX′의 길이가 최소일 때이고

선분 BX′의 길이가 최소일 때는

선분 BD와 선분 M′X가 평행할 때이다.

점 M′에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 H라 할 때,

삼각비에 따라서 $\overline{DH}=\frac{2\sqrt{13}}{13}$이고, $\overline{HX'}=2$이므로

$\overline{BX'}=\overline{BD}-\overline{DH}-\overline{HX'}$

$=\sqrt{13}-\frac{2\sqrt{13}}{13}-2$

$=\frac{11\sqrt{13}}{13}-2$

$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BX}=\sqrt{13}\,|\overrightarrow{BX'}|=11-2\sqrt{13}$이다.

$p+q=11-2=9$