2019학년도 대학수학능력시험 모의평가 2회

수학 영역(나 형) 해설지

Epsilon

정답 및 해설

1) [정답] ③ (출제자 : 17 석진우)

[출제의도] 지수법칙을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]

$5\times 9^{\frac{1}{2}}=5\times\left(3^2\right)^{\frac{1}{2}}=5\times 3=15$

2) [정답] ⑤ (출제자 : 17 석진우)

[출제의도] 집합의 연산을 할 수 있는가?

[해설]

$A\cap B=\{1,\ 2,\ 4,\ 8\}\cap\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$

$\quad=\{2,\ 4,\ 8\}$

따라서 집합 $A\cap B$ 의 모든 원소의 합은

$2+4+8=14$ 이다.

3) [정답] ② (출제자 : 18 이현준)

[출제의도] 수열의 극한을 이해하여 극한값을 구할 수 있는가?

[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\times 3^n+1}{3^{n+1}+2^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\left(\frac{1}{3}\right)^n}{3+2\times\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\frac{2+0}{3+0}=\frac{2}{3}$$

4) [정답] ① (출제자 : 18 김종해)

[출제의도] 역함수의 정의를 이용하여 주어진 값을 계산할 수 있는가?

[해설]

주어진 그림에서 $f(3)=4$, $f(4)=6$ 이고

역함수의 정의에 의하여 $f^{-1}(4)=3$ 이므로

구하는 값은 $f(4)+f^{-1}(4)=6+3=9$ 이다.

5) [정답] ① (출제자 : 17 김도훈)

[출제의도] 함수의 좌극한과 우극한의 정의를 이용하여 주어진 값을 구할 수 있는가?

[해설]

그림에서 보면 $\lim_{x\to 1-}f(x)=-1$ 이고 $\lim_{x\to 2+}f(x)=-3$ 이므로

$\lim_{x\to 1-}f(x)+\lim_{x\to 2+}f(x)=-4$ 이다.

6) [정답] ⑤ (출제자 : 17 김국연)

[출제의도] 독립사건의 성질을 알고 이를 활용할 수 있는가?

[해설]

두 사건 A 와 B 는 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}\mathrm{P}(B)$ 이다.

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$\quad=\frac{1}{4}+\mathrm{P}(B)-\frac{1}{4}\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$

이므로 $\frac{3}{4}\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}$ 에서 $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$ 이다.

따라서 $\mathrm{P}\left(B^C\right)=\frac{2}{3}$ 이다.

7) [정답] ③ (출제자 : 17 김도훈)

[출제의도] 주어진 표와 조건부확률을 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

[해설]

백화점 우수 고객 중에서 임의로 선택한 1 명이

목도리 A 를 선호하는 고객인 사건을 X,

백화점 우수 고객 중에서 임의로 선택한 1 명이

목도리 B 를 선호하는 고객인 사건을 Y 라 하자.

구해야 하는 확률은 $\mathrm{P}\left(Y^C|X\right)=\frac{\mathrm{P}\left(X\cap Y^C\right)}{\mathrm{P}(X)}$ 이므로

$\mathrm{P}(X)$ 와 $\mathrm{P}\left(X\cap Y^C\right)$ 의 값을 구해야 한다.

주어진 표를 이용하여 $\mathrm{P}(X)$ 와 $\mathrm{P}\left(X\cap Y^C\right)$ 의 값을 구해보면

$\mathrm{P}(X)=\frac{200}{300}=\frac{2}{3}$, $\mathrm{P}\left(X\cap Y^C\right)=\frac{90}{300}=\frac{3}{10}$ 이다.

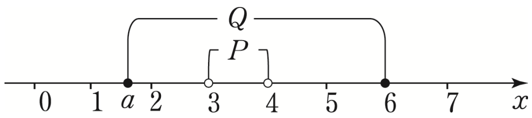
따라서 $\mathrm{P}\left(Y^C|X\right)=\frac{\mathrm{P}\left(X\cap Y^C\right)}{\mathrm{P}(X)}=\frac{\frac{3}{10}}{\frac{2}{3}}=\frac{9}{20}$ 이다.

8) [정답] ③ (출제자 : 16 김민지)

[출제의도] 충분조건에 대하여 이해하고 이를 활용할 수 있는가?

[해설]

조건 p 의 진리집합을 P, 조건 q 의 진리집합을 Q 라 하면
$P=\{x|3<x<4\}$ 이고 $Q=\{x|a\le x\le 6\}$ 이다.



p 가 q 이기 위한 충분조건이 되기 위해서는 $P\subset Q$ 이어야 하므로
$a\le 3$ 이어야 한다.
조건을 만족시키는 자연수 a 는 $1,\ 2,\ 3$ 이다.
따라서 가능한 자연수 a 의 개수는 3 이다.

9) [정답] ② (출제자 : 17 김정빈, 17 문혁준)

[출제의도] 다항함수의 정적분의 계산을 할 수 있는가?

[해설]

$$\begin{aligned}\int_0^2(4x^3-x+3)\,dx &= \left[x^4-\frac{1}{2}x^2+3x\right]_0^2\\ &= 2^4-\frac{1}{2}\times 2^2+3\times 2\\ &= 20\end{aligned}$$

10) [정답] ③ (출제자 : 17 김동규)

[출제의도] 자연수를 분할하는 방법의 수를 구할 수 있는가?

[해설]

$$\begin{aligned}16&=8+4+4\\ &=7+5+4\\ &=6+6+4\\ &=6+5+5\end{aligned}$$

따라서 16 을 4 이상의 세 자연수로 분할하는 방법의 수는 4 이다.

11) [정답] ⑤ (출제자 : 17 김도훈)

[출제의도] 급수의 수렴조건을 이용하여 극한값을 구할 수 있는가?

[해설]

급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{5n^2-1}{n^2+1}\right)$ 이 수렴하므로

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{5n^2-1}{n^2+1}\right)=0$ 이어야 한다.

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2-1}{n^2+1}=5$ 이므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=5$ 이다.

따라서 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n}{n}}{2+\frac{1}{n}}=\frac{5}{2}$ 이다.

12) [정답] ② (출제자 : 17 김동규)

[출제의도] 유리함수의 그래프의 특징을 파악할 수 있는가?

[해설]

주어진 곡선의 식을 정리하면 다음과 같다.

$y=\dfrac{4x-12}{x-a}=\dfrac{4a-12}{x-a}+4$

이는 곡선 $y=\dfrac{4a-12}{x}$ 를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동한 것이다.

곡선 $y=\dfrac{4a-12}{x}$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로
곡선 $y=\dfrac{4a-12}{x-a}+4$ 는 직선 $y=x$ 를 x 축의 방향으로 a 만큼,
y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동한 직선 $y=(x-a)+4$ 에 대하여 대칭이다.
따라서 $(x-a)+4=x+2$ 이므로 $a=2$ 이다.

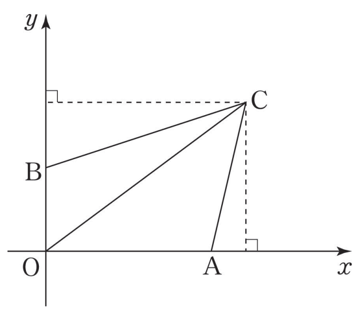
[보충] - 유리함수 $y=\dfrac{k}{x}$ $(k\neq 0)$ 의 그래프의 특징
지학사, 신항균 외 11명, <수학 2> 97쪽

> **유리함수 $y=\frac{k}{x}$ $(k\neq0)$의 그래프**
> (1) 정의역과 치역은 모두 0을 제외한 실수 전체의 집합이다.
> (2) $k>0$이면 그래프는 제1, 3사분면에 있고,
> $k<0$이면 그래프는 제2, 4사분면에 있다.
> (3) 원점과 직선 $y=x$에 대하여 대칭인 곡선이다.
> (4) 점근선은 x축과 y축이다.
> (5) $|k|$의 값이 커질수록 그래프가 원점에서 멀어진다.

13) [정답] ③ (출제자 : 17 김정빈)

[출제의도] 로그의 계산을 할 수 있는가?

[해설]



사각형 OACB 의 넓이는
삼각형 OAC 의 넓이와 삼각형 OCB 의 넓이의 합과 같다.
삼각형 OAC 의 넓이는 $2\times a\times\dfrac{1}{2}=a$ 이고,
삼각형 OCB 의 넓이는 $1\times\log_2\dfrac{16}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\log_2\dfrac{16}{3}$ 이다.

따라서 사각형 OACB 의 넓이는 $a+\dfrac{1}{2}\log_2\dfrac{16}{3}=3$ 이므로

$$\begin{aligned}a&=3-\frac{1}{2}\log_2\frac{16}{3}=\log_2 8-\log_2\frac{4}{\sqrt{3}}\\ &=\log_2\left(8\times\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=\log_2 2\sqrt{3}\\ &=\frac{1}{2}\log_2 12\end{aligned}$$

이다.

14) [정답] ⑤ (출제자 : 18 김성찬)

[출제의도] 표본평균의 표준화를 통하여 확률을 구할 수 있는가?

[해설]

이 공장에서 생산한 시계 중 임의추출한 16 개의 시계의 무게의 표본평균을 $\overline{X}$ 라 하면

$\mathrm{E}(\overline{X}) = 120$, $\sigma(\overline{X}) = \dfrac{1.6}{\sqrt{16}} = 0.4$ 이다.

이를 표준화시키면 $Z = \dfrac{\overline{X} - 120}{0.4}$ 이고, 확률변수 Z 는 정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$ 을 따른다.

따라서 구하는 값은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\overline{X} \geq 121) &= \mathrm{P}\left(Z \geq \frac{121-120}{0.4}\right) \\ &= \mathrm{P}(Z \geq 2.5) \\ &= \mathrm{P}(Z \geq 0) - \mathrm{P}(0 \leq Z \leq 2.5) \\ &= 0.5 - 0.4938 \\ &= 0.0062\end{aligned}$$

이다.

15) [정답] ④ (출제자 : 17 조영호)

[출제의도] 등차수열의 합을 이용하여 등차수열의 일반항을 추론할 수 있는가?

[해설]

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a, 공차를 d 라 하자.

$\sum_{k=1}^{4} a_k = -\sum_{k=6}^{9} a_k = 20$ 을 통해 아래의 두 식을 구할 수 있다.

$$\sum_{k=1}^{4} a_k = \frac{4(a+a+3d)}{2} = 4a+6d = 20$$

$$\sum_{k=6}^{9} a_k = \frac{4(a+5d+a+8d)}{2} = 4a+26d = -20$$

위의 두 식을 연립하면 $d = -2$, $a = 8$ 임을 알 수 있다.

따라서 $a_2 + a_6 = \{a+(2-1)d\} + \{a+(6-1)d\} = 2a+6d = 4$ 이다.

[별해]

$\sum_{k=1}^{4} a_k = -\sum_{k=6}^{9} a_k = 20$ 에서

$\sum_{k=1}^{4} a_k + \sum_{k=6}^{9} a_k = \sum_{k=1}^{4} (a_{5-k} + a_{5+k}) = 0$ 임을 알 수 있다.

등차중항을 이용하면, $a_{5-k} + a_{5+k} = 2a_5$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ 이므로

$\sum_{k=1}^{4} (a_{5-k} + a_{5+k}) = 8a_5 = 0$ 이다.

여기서 $a_5 = 0$ 임을 알 수 있다. 이를 $\sum_{k=6}^{9} a_k = -20$ 에 대입해 보자.

$$\begin{aligned}\sum_{k=6}^{9} a_k &= a_6 + a_7 + a_8 + a_9 \\ &= (a_5+d) + (a_5+2d) + (a_5+3d) + (a_5+4d) \\ &= 10d \ (\because a_5 = 0) \\ &= -20\end{aligned}$$

$10d = -20$ 이므로 $d = -2$ 이다.

따라서 $a_2 + a_6 = (a_5 - 3d) + (a_5 + d) = -2d = 4$ 이다.

16) [정답] ④ (출제자 : 18 안동우)

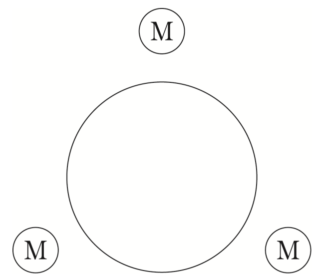
[출제의도] 주어진 조건을 해석하고 원순열을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

[해설]

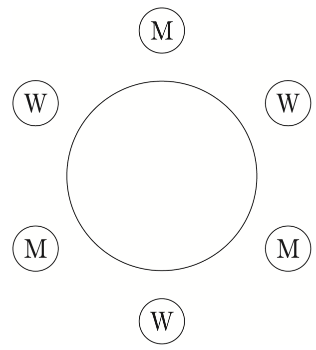
같은 성별의 학생은 이웃하지 않게 앉기 위해서는
남학생과 여학생이 서로 번갈아가며 앉아야 한다.
따라서 남학생 4 명과 여학생 4 명 중 3 명의 남학생과 3 명의 여학생이 번갈아가며 앉을 때에만 같은 성별의 학생이 이웃하지 않게 앉을 수 있다.

먼저 의자에 앉을 남학생 3 명을 뽑는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_3$ 이고
의자에 앉을 여학생 3 명을 뽑는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_3$ 이다.

먼저 남학생이 앉을 자리에 M 을 표시한다 할 때, 그림과 같이 3 명의 남학생이 원형의 탁자에 둘러 앉는 경우의 수는 $(3-1)!$ 이다.



이때 같은 성별의 학생은 서로 이웃하지 않아야 하므로
각각의 남학생 사이에 여학생이 한 명씩 앉아야 한다.
즉 여학생이 앉을 자리에 W 를 표시한다 할 때, 여학생은 그림과 같이 앉아야 한다.



그런데 남학생이 앉은 자리를 고정한 채, 여학생끼리 앉은 자리를 바꾸는 경우는 모두 서로 다른 경우이므로 여학생이 남은 세 자리에 둘러 앉는 경우의 수는 $3!$ 이다.

따라서 같은 성별의 학생은 이웃하지 않게 앉는 경우의 수는
${}_4\mathrm{C}_3 \times {}_4\mathrm{C}_3 \times (3-1)! \times 3! = 192$ 이다.

17) [정답] ② (출제자 : 17 문혁준)

[출제의도] 함수가 극한값을 가지는 조건과 미분계수의 정의를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]

(i) $n=1$

$f(x)$는 삼차함수이므로 실수 전체의 집합에서 연속이다.

따라서 $x=1$에서도 연속이다.

$x=1$에서 연속이면 $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$이므로

$\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-2}=\dfrac{f(1)}{-1}=f(1)$임을 알 수 있다.

이때 $-f(1)=f(1)$에서 $f(1)=0$을 얻는다.

따라서 다항식 $f(x)$는 $(x-1)$을 인수로 갖는다.

(ii) $n=2$

$\lim_{x\to2}\dfrac{f(x)}{x-2}$의 값이 존재하고 $\lim_{x\to2}(x-2)=0$이므로 $\lim_{x\to2}f(x)=0$이다.

$f(x)$는 삼차함수이므로 $x=2$에서 연속이다.

$x=2$에서 연속이면 $\lim_{x\to2}f(x)=f(2)$이므로 $f(2)=0$이다.

또한, $f(x)$는 삼차함수이므로 $x=2$에서 미분가능하다.

따라서 $f(2)=0$을 이용하면

$\lim_{x\to2}\dfrac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$이다.

문제의 조건에서 $\lim_{x\to2}\dfrac{f(x)}{x-2}=f(2)=0$이므로 $f'(2)=f(2)=0$임을 알 수 있다.

따라서 다항식 $f(x)$는 $(x-2)^2$을 인수로 갖는다. (⋯[보충] 참고)

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

(i), (ii)에서 $f(x)=(x-1)(x-2)^2$임을 알 수 있다.

따라서 $f(5)=4\times3^2=36$이다.

[보충]

다항식 $f(x)$가 상수 a에 대하여 $f'(a)=f(a)=0$이면

$f(x)$가 $(x-a)^2$을 인수로 갖는 이유는 다음과 같다.

$f(a)=0$이므로 인수정리에 의하여 $f(x)$는 $(x-a)$를 인수로 갖는다.

따라서 $f(x)=(x-a)Q(x)$라 할 수 있다. (단, $Q(x)$는 다항식)

이 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=Q(x)+(x-a)Q'(x)$이다.

$f'(a)=0$이므로 $f'(a)=Q(a)=0$이다.

인수정리에 의하여 $Q(x)$는 $(x-a)$를 인수로 갖는다.

따라서 $Q(x)=(x-a)K(x)$라 할 수 있다. (단, $K(x)$는 다항식)

이를 이용하여 $f(x)$의 식을 다시 써보면

$f(x)=(x-a)Q(x)=(x-a)^2K(x)$이다.

따라서 $f'(a)=f(a)=0$이면 다항식 $f(x)$는 $(x-a)^2$을 인수로 갖는다.

본 문제의 상황은 $a=2$일 때이므로 $f(x)$는 $(x-2)^2$을 인수로 가짐을 알 수 있다.

18) [정답] ① (출제자 : 17 박승용)

[출제의도] 도형에서 등비수열의 식을 추론하여 주어진 값을 구할 수 있는가?

[해설]

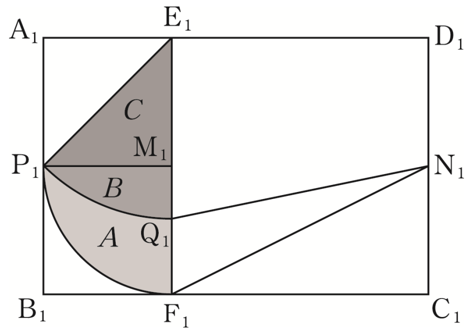
$\overline{A_1E_1}=\overline{P_1M_1}=\overline{M_1F_1}=1$이고 $\angle P_1M_1F_1=90^\circ$이므로

부채꼴 $M_1P_1F_1$의 넓이는 $\dfrac{90^\circ}{360^\circ}\times\pi\times1^2=\dfrac{\pi}{4}$이다.

삼각형 $P_1M_1E_1$은 직각이등변삼각형이므로

$\angle P_1E_1Q_1=45^\circ$이고, $\overline{E_1P_1}=\sqrt{2}\times\overline{A_1E_1}=\sqrt{2}$이므로

부채꼴 $E_1P_1Q_1$의 넓이는 $\dfrac{45^\circ}{360^\circ}\times\pi\times(\sqrt{2})^2=\dfrac{\pi}{4}$이다.



호 P_1Q_1, 호 P_1F_1, 선분 Q_1F_1으로 둘러싸인 영역의 넓이를 A,

호 P_1Q_1, 선분 Q_1M_1, 선분 P_1M_1으로 둘러싸인 영역의 넓이를 B,

삼각형 $P_1M_1E_1$의 넓이를 C라 하자.

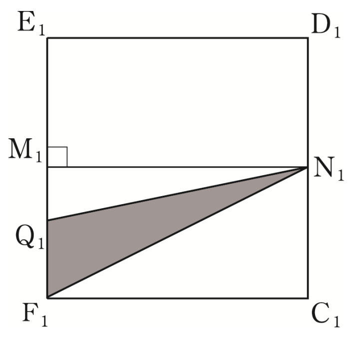
부채꼴 $M_1P_1F_1$의 넓이와 부채꼴 $E_1P_1Q_1$의 넓이가 $\dfrac{\pi}{4}$로 같으므로

$A+B=B+C$가 성립한다. 즉, $A=C$가 성립한다.

따라서 A는 삼각형 $P_1M_1E_1$의 넓이인 $\dfrac{1}{2}$과 같다.

R_1에서 생기는  모양의 도형의 넓이는 A와 삼각형 $Q_1F_1N_1$의 넓이의 합과 같다.

A의 값은 구했으므로, 삼각형 $Q_1F_1N_1$의 넓이를 구해보자.



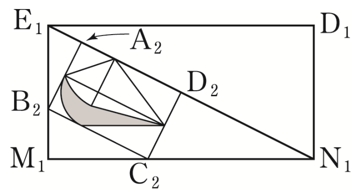
$\overline{M_1N_1}=2$이고 $\overline{Q_1F_1}=\overline{E_1F_1}-\overline{E_1Q_1}=2-\sqrt{2}$이므로

삼각형 $Q_1N_1F_1$의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{Q_1F_1}\times\overline{M_1N_1}=\dfrac{1}{2}\times2\times(2-\sqrt{2})=2-\sqrt{2}$이다.

따라서 R_1의  모양의 도형의 넓이는

$\dfrac{1}{2}+(2-\sqrt{2})=\dfrac{5-2\sqrt{2}}{2}$이므로 $S_1=\dfrac{5-2\sqrt{2}}{2}$이다. ⋯㉠



삼각형 $E_1N_1M_1$ 과 삼각형 $C_2N_1D_2$ 는 직각삼각형이고 각 $E_1N_1M_1$ 을 공유하고 있으므로 두 삼각형은 닮음이다. 마찬가지로 삼각형 $E_1N_1M_1$ 과 삼각형 $E_1B_2A_2$ 는 직각삼각형이고 각 $B_2E_1A_2$ 를 공유하고 있으므로 두 삼각형은 닮음이다.

직각삼각형 $E_1N_1M_1$ 에서
$\overline{E_1M_1} : \overline{M_1N_1} : \overline{E_1N_1} = 1 : 2 : \sqrt{5}$ 이므로
직각삼각형 $C_2N_1D_2$ 에서 $\overline{C_2D_2} : \overline{D_2N_1} : \overline{C_2N_1} = 1 : 2 : \sqrt{5}$ 이고
직각삼각형 $E_1B_2A_2$ 에서 $\overline{E_1A_2} : \overline{A_2B_2} : \overline{E_1B_2} = 1 : 2 : \sqrt{5}$ 이다.
$\overline{A_2B_2} : \overline{A_2D_2} = 2 : 3$ 이므로
$\overline{A_2B_2} = 2k$, $\overline{A_2D_2} = 3k$ 라 하자. (단, k 는 양의 실수)
$\overline{E_1A_2} : \overline{A_2B_2} = 1 : 2$ 이므로 $\overline{E_1A_2} = k$ 이다.
또 $\overline{A_2B_2} = \overline{C_2D_2} = 2k$ 이고 $\overline{C_2D_2} : \overline{D_2N_1} = 1 : 2$ 이므로
$\overline{D_2N_1} = 4k$ 이다.

따라서
$\overline{E_1N_1} = \overline{E_1A_2} + \overline{A_2D_2} + \overline{D_2N_1} = k + 3k + 4k = 8k = \sqrt{5}$ 이므로
$k = \dfrac{\sqrt{5}}{8}$ 이고, 이에 따라 $\overline{A_2B_2} = 2k = \dfrac{\sqrt{5}}{4}$ 이다.
이때 $\overline{A_1B_1} : \overline{A_2B_2} = 2 : \dfrac{\sqrt{5}}{4} = 8 : \sqrt{5}$ 이므로
두 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 과 $A_2B_2C_2D_2$ 의 닮음비는 $8 : \sqrt{5}$ 이다.
그에 따라, 두 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 과 $A_2B_2C_2D_2$ 의 넓이의 비는 $64 : 5$ 이다.

즉, R_2 에서 새롭게 생기는 모양의 도형의 넓이는
$S_1 \times \left(\dfrac{5}{64}\right)^1 = \dfrac{5-2\sqrt{2}}{2} \times \left(\dfrac{5}{64}\right)^1$ ($\because$ ㉠) 임을 알 수 있다.

같은 방식으로 생각하면 R_n 에서 새롭게 생기는 모양의 도형의 넓이는 $\dfrac{5-2\sqrt{2}}{2} \times \left(\dfrac{5}{64}\right)^{n-1}$ 임을 알 수 있다. …㉡

㉠과 ㉡에 의하여 S_n 은 첫째항이 $\dfrac{5-2\sqrt{2}}{2}$ 이고 공비가 $\dfrac{5}{64}$ 인 등비수열의 첫째항부터 n 번째 항까지의 합과 같음을 알 수 있다.

따라서 구하는 값은

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{S_1 \times \left\{1-\left(\frac{5}{64}\right)^n\right\}}{1-\frac{5}{64}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{64}{59} \times \frac{5-2\sqrt{2}}{2} \times \left\{1-\left(\frac{5}{64}\right)^n\right\}$$
$$= \frac{64}{59} \times \frac{5-2\sqrt{2}}{2} \times (1-0)$$
$$= \frac{32(5-2\sqrt{2})}{59}$$

이다.

19) [정답] ④ (출제자 : 18 안동우)
[출제의도] 조건을 해석하여 주어진 상황의 경우의 수를 구할 수 있는가?

[해설]
자연수 n 에 대하여 $|x_k| \le n$ 이므로 $-n \le x_k \le n$ 이다. $(k=1, 2, 3)$

(i) x_1, x_2, x_3 가 전부 음이 아닌 정수인 경우
방정식 $x_1+x_2+x_3=n$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 x_1, x_2, x_3 의 모든 순서쌍 (x_1, x_2, x_3) 의 개수는 서로 다른 3 개에서 중복을 허락하여 n 개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
$\boxed{{}_3H_n} = \boxed{{}_{n+2}C_n} = \boxed{\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}}$ 임을 알 수 있다.

(ii) x_1, x_2, x_3 중 음의 정수가 1 개인 경우
세 정수 x_1, x_2, x_3 중 x_1 만 음의 정수인 경우를 보기 위하여
$x_1 = -t$ $(1 \le t \le n)$ 이라 하자.
$x_1+x_2+x_3=n$ 이므로 $x_2+x_3=n+t$ 이다.
정수 x_2, x_3 는 각각 $0 \le x_2 \le n$, $0 \le x_3 \le n$ 을 만족시키므로
$x_2+x_3=n+t$ 를 만족시키는 x_2 의 최댓값은 n 이고
x_2 가 최댓값을 가질 때 x_3 의 값은 t 이다.
또 $x_2+x_3=n+t$ 를 만족시키는 x_2 의 최솟값은 t 이고
x_2 가 최솟값을 가질 때 x_3 의 값은 n 이다.
따라서 $t \le x_2 \le n$ 일 때에만 $x_2+x_3=n+t$ 를 만족시키는 x_3 의 값이 존재한다.
t 부터 n 까지의 정수의 개수는 $n-t+1$ 이므로
모든 순서쌍 (x_2, x_3) 의 개수는 $\boxed{n+1}-t$ 이다.
따라서 x_1 이 음의 정수일 때 $x_1+x_2+x_3=n$ 을 만족시키는 모든 순서쌍 (x_1, x_2, x_3) 의 개수는
$\displaystyle\sum_{t=1}^{n}\left(\boxed{n+1}-t\right) = \frac{n(n+1)}{2}$ 이다.
이와 같은 방법으로 x_2 만 음의 정수일 때와 x_3 만 음의 정수일 때를 각각 계산하면
x_1, x_2, x_3 중 음의 정수가 1 개일 때, 방정식 $x_1+x_2+x_3=n$ 을 만족시키는 모든 순서쌍 (x_1, x_2, x_3) 의 개수는
$\dfrac{3n(n+1)}{2}$ 임을 알 수 있다.

(iii) x_1, x_2, x_3 중 음의 정수가 2 개 이상인 경우
x_1 과 x_2 가 음의 정수일 때를 보기 위하여
$x_1 = -t_1$ $(1 \le t_1 \le n)$, $x_2 = -t_2$ $(1 \le t_2 \le n)$ 이라 하자.
$x_1+x_2+x_3=n$ 이므로 $x_3 = n+t_1+t_2$ 이다.
그런데 정수 x_3 는 $x_3=n+t_1+t_2>n$ 과 $-n \le x_3 \le n$ 을 동시에 만족시켜야 하지만 $x_3>n$ 과 $x_3 \le n$ 은 동시에 만족시킬 수 없다. 따라서 이를 만족시키는 정수 x_3 는 존재하지 않는다. 즉, 정수 x_3 의 부호에 상관없이 x_1 과 x_2 가 음의 정수이면 방정식 $x_1+x_2+x_3=n$ 을 만족시키는 순서쌍 (x_1, x_2, x_3) 가 존재하지 않는다.
이와 같은 방법으로 생각하면, x_1 과 x_3 가 음의 정수일 때 방정식 $x_1+x_2+x_3=n$ 을 만족시키는 순서쌍 (x_1, x_2, x_3) 가 존재하지 않는다는 것을 알 수 있다.

마찬가지로 x_2, x_3가 음의 정수일 때에도 방정식 $x_1+x_2+x_3=n$을 만족시키는 순서쌍 (x_1, x_2, x_3)가 존재하지 않는다는 것을 알 수 있다.
따라서 x_1, x_2, x_3 중 음의 정수가 2개 이상인 경우 방정식 $x_1+x_2+x_3=n$을 만족시키는 순서쌍 (x_1, x_2, x_3)는 존재하지 않는다.

따라서 (i), (ii), (iii)에 의하여

$$a_n = \boxed{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} + 3\times\sum_{t=1}^{n}\left(\boxed{n+1}-t\right) = (n+1)(2n+1)$$

이고

$$\sum_{n=1}^{5} a_n = \sum_{n=1}^{5}(2n^2+3n+1) = \boxed{160}$$

이다.

따라서 $f(n)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$, $g(n)=n+1$, $a=160$이므로 $\frac{a}{f(4)+g(4)}=\frac{160}{15+5}=8$이다.

20) [정답] ⑤ (출제자 : 14 임현우)

[출제의도] 극한의 성질을 이용하여 극한값이 존재하는 상황을 이해하고 함수의 미정계수를 구할 수 있는가?

[해설]
$h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$이므로 (가) 조건에서
$\lim_{x\to\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{xg(x)}=4$이다.
극한값이 0이 아닌 상수이므로 분모의 차수와 분자의 차수가 같다.
그런데 $f(x)$는 사차함수이고 $g(x)$가 다항함수이므로 $g(x)$는 삼차함수임을 알 수 있고, 극한값을 고려해보았을 때 $g(x)$의 최고차항의 계수가 $\frac{1}{4}$인 것 또한 알 수 있다.
즉, $g(x)$는 최고차항의 계수가 $\frac{1}{4}$인 삼차함수이다.
한편, 문제의 조건에서 $g(2)=0$이라 하였으므로
$g(x)=\frac{1}{4}(x-2)(x^2+ax+b)$라 할 수 있다. (단, a, b는 상수)…㉠

또한 (가) 조건에서 $\lim_{x\to0}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{xg(x)}=0$이고
$\lim_{x\to0}xg(x)=0$이므로 $\lim_{x\to0}f(x)=0$임을 알 수 있다.
$f(x)$는 사차함수이므로 실수 전체의 집합에서 연속이다.
즉 $x=0$에서도 연속이므로 $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=0$이다.
$f(0)=0$에서 $f(x)$는 x를 인수로 갖는다는 것을 알 수 있으므로
$f(x)=x(x^3+px^2+qx+r)$라 할 수 있다. (단, p, q, r는 상수)…㉡

㉠과 ㉡에 의하여
$$\lim_{x\to0}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{xg(x)}=\lim_{x\to0}\frac{4(x^3+px^2+qx+r)}{(x-2)(x^2+ax+b)}$$ 이다.

(i) $\lim_{x\to0}(x-2)(x^2+ax+b)$의 값이 0인 경우
$\lim_{x\to0}\frac{4(x^3+px^2+qx+r)}{(x-2)(x^2+ax+b)}$의 값이 존재하기 위해서는
$\lim_{x\to0}4(x^3+px^2+qx+r)=4r=0$이어야 하므로 $r=0$이다.

(ii) $\lim_{x\to0}(x-2)(x^2+ax+b)$의 값이 0이 아닌 경우
$\lim_{x\to0}(x-2)(x^2+ax+b)=-2b\neq0$이므로 $b\neq0$이다.
그런데 $\lim_{x\to0}\frac{4(x^3+px^2+qx+r)}{(x-2)(x^2+ax+b)}=\frac{4r}{-2b}=0$이므로 $r=0$이다.

(i), (ii) 두 경우 모두에서 $r=0$이어야 하므로 ㉡에 $r=0$을 대입하면 $f(x)=x^2(x^2+px+q)$라 할 수 있다.

한편, (나) 조건에서
$$\lim_{x\to1}(x-1)^2h(x)=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^2f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to1}\frac{4x^2(x-1)^2(x^2+px+q)}{(x-2)(x^2+ax+b)}$$
이다. 이때 이 극한값이 0이 아니고
$\lim_{x\to1}4x^2(x-1)^2(x^2+px+q)=0$이므로
$\lim_{x\to1}(x-2)(x^2+ax+b)=-(1+a+b)=0$이어야 한다.
즉, $b=-(a+1)$이어야 한다.

$$\lim_{x\to1}\frac{4x^2(x-1)^2(x^2+px+q)}{(x-2)(x^2+ax+b)}=\lim_{x\to1}\frac{4x^2(x-1)^2(x^2+px+q)}{(x-2)\{x^2+ax-(a+1)\}}=\lim_{x\to1}\frac{4x^2(x-1)^2(x^2+px+q)}{(x-2)(x+a+1)(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{4x^2(x-1)(x^2+px+q)}{(x-2)(x+a+1)}$$
이다. 이때 이 극한값이 0이 아니고
$\lim_{x\to1}4x^2(x-1)(x^2+px+q)=0$이므로
$\lim_{x\to1}(x-2)(x+a+1)=-(a+2)=0$이어야 한다.
즉, $a=-2$여야 하고 $b=-(a+1)$이므로 $b=1$이다.
이를 ㉠에 대입하면 $g(x)=\frac{1}{4}(x-1)^2(x-2)$임을 알 수 있다.

따라서 $h(x)=\frac{4x^2(x^2+px+q)}{(x-1)^2(x-2)}$이므로
$\lim_{x\to1}(x-1)^2h(x)=\lim_{x\to1}\frac{4x^2(x^2+px+q)}{x-2}=\frac{4(1+p+q)}{-1}=12$이다.
따라서 $p+q=-4$이다. …ⓐ

(다) 조건에 의하여 $\lim_{x\to2}h(x)=\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{g(x)}$의 값이 존재하고
$\lim_{x\to2}g(x)=\lim_{x\to2}\frac{1}{4}(x-1)^2(x-2)=0$이므로
$\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}x^2(x^2+px+q)=4(4+2p+q)=0$이어야 한다.
따라서 $2p+q=-4$이다. …ⓑ

ⓐ와 ⓑ를 연립하면
$p=0$, $q=-4$임을 알 수 있으므로
$f(x)=x^2(x^2-4)=x^2(x+2)(x-2)$이다.

따라서 $f(x)=x^2(x+2)(x-2)$, $g(x)=\frac{1}{4}(x-1)^2(x-2)$이므로
$f(3)+g(3)=3^2\times5\times1+\frac{1}{4}\times2^2\times1=45+1=46$이다.

21) [정답] ④ (출제자 : 17 김정빈, 18 안동우)

[출제의도] 합성함수의 정의에 대해 잘 알고 이를 복잡한 상황에 적용할 수 있는가?

[해설]

함수 $f(x)$의 정의역이 구간 $[0,4)$이고
함수 $g(x)=f(f(x))$가 구간 $[0,4)$에서 정의되므로
$0\le x<4$일 때 $0\le f(x)<4$임을 알 수 있다. ⋯㉠

(가) 조건에 의하여
$\lim_{x\to4-}g(x)=\lim_{x\to4-}f(f(x))=4$임을 알 수 있다.
$\lim_{x\to4-}f(x)=L$이라 하고, $f(x)=t$라 하자.
$a>0$이므로 구간 $[3,4)$에서 함수 $f(x)$는 증가한다.
따라서 $x\to4-$ 일 때 $t\to L-$ 이므로
$\lim_{x\to4-}f(f(x))=\lim_{t\to L-}f(t)$임을 이용하여
L의 값의 범위에 따라 경우를 나누어 보자.

① $L=0$인 경우
$\lim_{x\to4-}f(f(x))=\lim_{t\to0-}f(t)$이다.
그런데 $x<0$인 범위에서 $f(x)$는 정의되지 않으므로
극한값이 존재하지 않는다. 이는 (가) 조건에 모순이다.

② $0<L<1$인 경우
$\lim_{x\to4-}f(f(x))=\lim_{t\to L-}f(t)=\lim_{t\to L-}t=L$이고
$0<L<1$이므로 이는 (가) 조건에 모순이다.

③ $L=1$인 경우
$\lim_{x\to4-}f(f(x))=\lim_{t\to1-}f(t)=\lim_{t\to1-}t=1$이고
이는 (가) 조건에 모순이다.

④ $1<L<2$인 경우
$g(x)$가 (가) 조건을 만족시키므로 $\lim_{x\to4-}f(f(x))=\lim_{t\to L-}f(t)=4$이고
구간 $(1,2)$에서 함수 $f(x)$는 연속이므로 $\lim_{t\to L-}f(t)=f(L)=4$이다.
이는 ㉠에 모순이다.

⑤ $L=2$인 경우
$g(x)$가 (가) 조건을 만족시키므로 $\lim_{x\to4-}f(f(x))=\lim_{t\to2-}f(t)=4$이다.
한편, $a>0$이므로 $3\le\alpha<4$인 모든 실수 α에 대하여 $f(\alpha)>4$이다.
이는 ㉠에 모순이다.

⑥ $2<L<3$인 경우
$\lim_{x\to4-}f(f(x))=\lim_{t\to L-}f(t)=\lim_{t\to L-}(t-2)=L-2$이고
$0<L-2<1$이므로 이는 (가) 조건에 모순이다.

⑦ $L=3$인 경우
$\lim_{x\to4-}f(f(x))=\lim_{t\to3-}f(t)=\lim_{t\to3-}(t-2)=1$이고
이는 (가) 조건에 모순이다.

⑧ $3<L<4$인 경우
$g(x)$가 (가) 조건을 만족시키므로 $\lim_{x\to4-}f(f(x))=\lim_{t\to L-}f(t)=4$이고
구간 $(3,4)$에서 함수 $f(x)$는 연속이므로 $\lim_{t\to L-}f(t)=f(L)=4$이다.
이는 ㉠에 모순이다.

⑨ $L=4$인 경우
$\lim_{x\to4-}f(x)=L=4$이므로 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 구간 $[0,4)$에서
정의된다. 또한 $\lim_{x\to4-}f(f(x))=\lim_{t\to4-}f(t)=4$이다.
즉, $\lim_{x\to4-}g(x)=4$이므로 (가) 조건을 만족시킨다.

이제 (나) 조건의 의미를 알아보자.
만약 함수 $g(x)$가 $x=\frac{3}{2}$에서 연속이라면 (1) $g\left(\frac{3}{2}\right)$의 값이 정의되어 있고
(2) $\lim_{x\to\frac{3}{2}}g(x)$의 값이 존재하고 (3) $g\left(\frac{3}{2}\right)=\lim_{x\to\frac{3}{2}}g(x)$이어야 한다.
하지만 (나) 조건에 의하면 $g(x)$는 $x=\frac{3}{2}$에서 불연속이므로
(1), (2), (3) 중 적어도 하나를 만족시키지 않는다.

$g\left(\frac{3}{2}\right)=f\left(f\left(\frac{3}{2}\right)\right)$에서 $f\left(\frac{3}{2}\right)=\alpha$라 하면 ㉠에 의하여 $0\le\alpha<4$이다.
따라서 $f(\alpha)$의 값은 주어진 조건에 의하여 정의되고 $g\left(\frac{3}{2}\right)=f(\alpha)$이므로
$g\left(\frac{3}{2}\right)$의 값이 정의된다. 즉, $g(x)$는 (1)을 반드시 만족시킨다.
따라서 (2), (3) 중 적어도 하나를 만족시키지 않는다.

$\lim_{x\to\frac{3}{2}}g(x)$의 값이 존재한다고 가정하자. 그러면 (3)을 만족시키지 않아야
$g(x)$가 $x=\frac{3}{2}$에서 불연속이다.

$\lim_{x\to\frac{3}{2}}g(x)$의 값이 존재한다고 가정했으므로
$\lim_{x\to\frac{3}{2}-}g(x)=\lim_{x\to\frac{3}{2}+}g(x)$이다.

이때 $\lim_{x\to\frac{3}{2}-}g(x)=\lim_{x\to\frac{3}{2}-}f(f(x))$이고 $f(x)=t$라 하면
$x\to\frac{3}{2}-$ 일 때 $t\to\left(\frac{3}{2}a+b\right)-$ 이므로
$$\lim_{x\to\frac{3}{2}-}f(f(x))=\lim_{t\to\left(\frac{3}{2}a+b\right)-}f(t)$$
이다.

같은 방식으로 생각하면
$$\lim_{t\to\left(\frac{3}{2}a+b\right)-}f(t)=\lim_{t\to\left(\frac{3}{2}a+b\right)+}f(t)$$
임을 알 수 있다.

$\lim_{t\to\left(\frac{3}{2}a+b\right)+}f(t)$의 값이 존재하므로 $0\le\frac{3}{2}a+b<4$임을 알 수 있고
문제의 조건에 의하여 $f\left(\frac{3}{2}a+b\right)$가 정의된다.
그런데 $f(x)$는 $0\le c<4$인 모든 실수 c에 대하여
$f(c)=\lim_{x\to c+}f(x)$를 반드시 만족시킨다.

따라서 $f\left(\frac{3}{2}a+b\right)=\lim_{t\to\left(\frac{3}{2}a+b\right)+}f(t)=\lim_{t\to\left(\frac{3}{2}a+b\right)-}f(t)$ 이므로

$g\left(\frac{3}{2}\right)=\lim_{x\to\frac{3}{2}+}g(x)=\lim_{x\to\frac{3}{2}-}g(x)$ 이다.

즉, $\lim_{x\to\frac{3}{2}}g(x)$ 의 값이 존재한다고 가정하면 반드시 (3)을 만족시키므로

(나) 조건을 만족시키지 않는다.

이에 따라 $\lim_{x\to\frac{3}{2}}g(x)$ 의 값이 존재하지 않음을 알 수 있다.

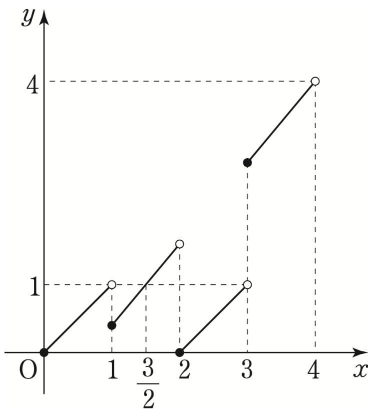
함수 $f(x)$ 는 구간 $[0,1)$, $[1,2)$, $[2,3)$, $[3,4)$ 에서

각각 연속이므로

$\lim_{x\to\frac{3}{2}}f(x)$ 의 값이 1, 2, 3 이 아니면 $\lim_{x\to\frac{3}{2}}g(x)$ 의 값이 존재한다.

따라서 $\lim_{x\to\frac{3}{2}}f(x)$ 의 값이 1, 2, 3 인 경우를 고려하자.

(ⅰ) $\lim_{x\to\frac{3}{2}}f(x)=1$ 인 경우



$f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}a+b=1$, $\lim_{x\to 4-}f(x)=4a+b=4$ 이므로

계산하면 $a=\frac{6}{5}$, $b=-\frac{4}{5}$ 이다.

이때 $\lim_{x\to\frac{3}{2}-}g(x)=\lim_{x\to\frac{3}{2}-}f(f(x))=\lim_{t\to 1-}f(t)=1$ 이고

$\lim_{x\to\frac{3}{2}+}g(x)=\lim_{x\to\frac{3}{2}+}f(f(x))=\lim_{t\to 1+}f(t)=\frac{2}{5}$ 이므로

$g(x)$ 는 $x=\frac{3}{2}$ 에서 불연속이다.

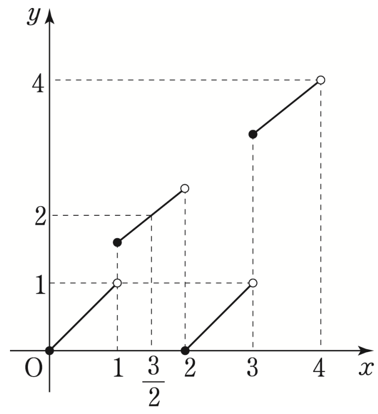
따라서 모든 조건을 만족시키므로

$$\lim_{x\to 2-}g(x)=\lim_{x\to 2-}f(f(x))=\lim_{x\to 2-}f\left(\frac{6}{5}x-\frac{4}{5}\right)=\lim_{t\to\frac{8}{5}-}f(t)$$

$$=\lim_{t\to\frac{8}{5}-}\left(\frac{6}{5}t-\frac{4}{5}\right)=\frac{6}{5}\times\frac{8}{5}-\frac{4}{5}=\frac{28}{25}$$

이다.

(ⅱ) $\lim_{x\to\frac{3}{2}}f(x)=2$



$f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}a+b=2$, $\lim_{x\to 4-}f(x)=4a+b=4$ 이므로

계산하면 $a=\frac{4}{5}$, $b=\frac{4}{5}$ 이다.

이때 $\lim_{x\to\frac{3}{2}-}g(x)=\lim_{x\to\frac{3}{2}-}f(f(x))=\lim_{t\to 2-}f(t)=\frac{12}{5}$ 이고

$\lim_{x\to\frac{3}{2}+}g(x)=\lim_{x\to\frac{3}{2}+}f(f(x))=\lim_{t\to 2+}f(t)=0$ 이므로

$g(x)$ 는 $x=\frac{3}{2}$ 에서 불연속이다.

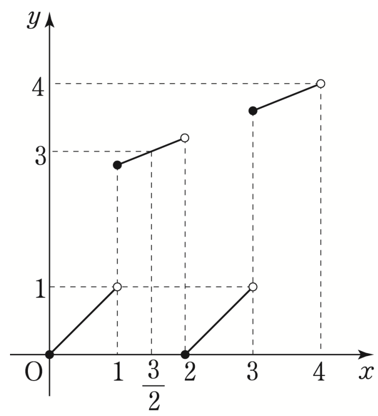
따라서

$$\lim_{x\to 2-}g(x)=\lim_{x\to 2-}f(f(x))=\lim_{x\to 2-}f\left(\frac{4}{5}x+\frac{4}{5}\right)=\lim_{t\to\frac{12}{5}-}f(t)$$

$$=\lim_{t\to\frac{12}{5}-}(t-2)=\frac{2}{5}$$

이다.

(ⅲ) $\lim_{x\to\frac{3}{2}}f(x)=3$



$f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}a+b=3$, $\lim_{x\to 4-}f(x)=4a+b=4$ 이므로

계산하면 $a=\frac{2}{5}$, $b=\frac{12}{5}$ 이다.

이때 $\lim_{x\to\frac{3}{2}-}g(x)=\lim_{x\to\frac{3}{2}-}f(f(x))=\lim_{t\to 3-}f(t)=1$ 이고

$\lim_{x\to\frac{3}{2}+}g(x)=\lim_{x\to\frac{3}{2}+}f(f(x))=\lim_{t\to 3+}f(t)=\frac{18}{5}$ 이므로

$g(x)$ 는 $x=\frac{3}{2}$ 에서 불연속이다.

따라서

$$\lim_{x \to 2-} g(x) = \lim_{x \to 2-} f(f(x)) = \lim_{x \to 2-} f\left(\frac{2}{5}x + \frac{12}{5}\right) = \lim_{t \to \frac{16}{5}-} f(t)$$

$$= \lim_{t \to \frac{16}{5}-} \left(\frac{2}{5}t + \frac{12}{5}\right) = \frac{92}{25}$$

이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 $M = \frac{92}{25}$, $m = \frac{2}{5}$ 이다.

따라서 $M - m = \frac{82}{25}$ 이다.

22) [정답] 72 (출제자 : 17 김정빈)

[출제의도] 간단한 순열의 계산을 할 수 있는가?

[해설]

${}_9\mathrm{P}_2 = 9 \times 8 = 72$

23) [정답] 5 (출제자 : 18 권세은)

[출제의도] 간단한 다항함수의 미분을 할 수 있는가?

[해설]

$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 7$ 이므로

$f'(1) = 4 - 6 + 7 = 5$ 이다.

24) [정답] 32 (출제자 : 17 김도훈)

[출제의도] 합집합과 여집합을 이용하여 주어진 집합의 개수를 구할 수 있는가?

[해설1]

$A = \{1, 2\}$ 이므로 $A^C = \{3, 4, 5, 6\}$ 이다.

$n(A^C) = 4$, $n(A^C \cup B) = 5$ 이므로 $n(B - A^C) = 1$ 이고

남은 원소가 $1, 2$ 이므로 이 두 원소 중 집합 B 에 포함시킬 원소를 고르는 경우의 수는 2 이다.

또한 $3, 4, 5, 6$ 각각을 집합 B 에 포함시키거나 포함시키지 않는 모든 경우의 수는 $2^4 = 16$ 이다.

따라서 구하는 집합 B 의 개수는 $2 \times 16 = 32$ 이다.

[해설2]

드모르간 법칙에 의하여 $A^C \cup B = (A \cap B^C)^C$ 이다.

문제의 조건에 따라 $n(A^C \cup B) = n((A \cap B^C)^C) = 5$ 이고

전체집합 U 의 원소의 개수가 6 이므로 $n(A \cap B^C) = 1$ 이다.

다시 말해 $n(A - B) = 1$ 이다.

그런데 $A = \{1, 2\}$ 이므로 $n(A \cap B) = 1$ 이어야 한다.

1 과 2 중에서 $A \cap B$ 에 포함될 원소를 고르는 경우의 수는 2 이다.

또한 남은 원소 $3, 4, 5, 6$ 이

집합 $A^C \cap B$ 에 속하는지, 또는 집합 $(A \cup B)^C$ 에 속하는지를 결정하는 경우의 수는 $2^4 = 16$ 이다.

따라서 구하는 집합 B 의 개수는 $2 \times 16 = 32$ 이다.

25) [정답] 38 (출제자 : 18 이현준)

[출제의도] 함수가 극값을 갖는 점에서의 특징을 도함수와 관련지어 이해할 수 있는가?

[해설]

$f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 30$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$f'(x) = 3x^2 - 18x + 15 = 3(x-1)(x-5)$ 이다.

$f'(x) = 0$ 을 만족시키는 x 의 값을 구해보면

$f'(x) = 3(x-1)(x-5) = 0$ 에서 $x = 1$ 과 $x = 5$ 임을 알 수 있다.

따라서 함수 $f(x)$ 의 증가·감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

즉 $x = 1$ 에서 함수 $f(x)$ 는 극댓값 $f(1)$ 을 갖는다.

따라서 구하는 값은 $a + M = a + f(1) = 1 + 37 = 38$ 이다.

26) [정답] 24 (출제자 : 17 박승용)

[출제의도] 적분을 활용하여 속도와 거리에 관한 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]

시각 t 에서의 점 P 의 속도 $v(t)$ 가

$v(t) = -t^3 + at^2 = t^2(a - t)$ 이므로 점 P 는 시각 $t = a$ 에서 운동방향을 바꾼다는 것을 알 수 있다.

시각 t 에서의 점 P 의 위치를 $x(t)$ 라 하자.

문제에서 주어진 식의 양변을 시각 t 에 대하여 적분하면

$$x(t) = -\frac{t^4}{4} + \frac{at^3}{3} + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})$$

이고 점 P 가 원점에서 출발하므로 $x(0) = 0$ 이다.

$x(0) = 0$ 이려면 $C = 0$ 이어야 하므로 $x(t) = -\frac{t^4}{4} + \frac{at^3}{3}$ 이다.

$x(t) = -\frac{t^4}{4} + \frac{at^3}{3} = -\frac{t^3}{4}\left(t - \frac{4a}{3}\right)$ 이므로

점 P 는 시각 $t = \frac{4a}{3}$ 에서 원점을 다시 지난다.

따라서 운동 방향이 바뀔 때의 시각과, 원점을 다시 지날 때의 시각의 차는

$\left|a - \frac{4a}{3}\right| = \frac{a}{3} = 8$ 이므로 $a = 24$ 이다.

27) [정답] 25　(출제자 : 17 김국연)

[출제의도] 조건부확률을 계산할 수 있는가?

[해설]
동전의 앞면이 나온 횟수와 뒷면이 나온 횟수가 같으려면 주사위를 던져서 나온 눈의 수가 짝수가 되어야 한다.
따라서 주사위를 던져서 나온 눈의 수가 2, 4, 6 인 경우를 고려해 보자.

(ⅰ) 주사위를 던져서 나온 눈의 수가 2 인 경우
주사위를 던져서 나온 눈의 수가 2 일 확률은 $\frac{1}{6}$ 이다.
또, 동전을 2 번 던져서 앞면과 뒷면이 각각 1 번씩 나올 확률은
${}_2C_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$ 이다.
따라서 구하는 확률은 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$ 이다.

(ⅱ) 주사위를 던져서 나온 눈의 수가 4 인 경우
주사위를 던져서 나온 눈의 수가 4 일 확률은 $\frac{1}{6}$ 이다.
또, 동전을 4 번 던져서 앞면과 뒷면이 각각 2 번씩 나올 확률은
${}_4C_2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$ 이다.
따라서 구하는 확률은 $\frac{1}{6} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{16}$ 이다.

(ⅲ) 주사위를 던져서 나온 눈의 수가 6 인 경우
주사위를 던져서 나온 눈의 수가 6 일 확률은 $\frac{1}{6}$ 이다.
또, 동전을 6 번 던져서 앞면과 뒷면이 각각 3 번씩 나올 확률은
${}_6C_3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}$ 이다.
따라서 구하는 확률은 $\frac{1}{6} \times \frac{5}{16} = \frac{5}{96}$ 이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 확률은
$$\frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{12}+\frac{1}{16}+\frac{5}{96}} = \frac{\frac{6}{96}}{\frac{8}{96}+\frac{6}{96}+\frac{5}{96}} = \frac{6}{19}$$ 이다.

따라서 $p = 19$, $q = 6$ 이므로 $p+q = 25$ 이다.

28) [정답] 16　(출제자 : 18 김윤태)

[출제의도] 모평균의 추정에서 신뢰도의 의미를 이해하여 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]
먼저 p_1 을 계산하자.
$$\begin{aligned} p_1 &= \mathrm{P}\left(\overline{x}_1 - \sigma \le m \le \overline{x}_1 + \sigma\right) \\ &= \mathrm{P}\left(-\sigma \le m - \overline{x}_1 \le \sigma\right) \\ &= \mathrm{P}\left(-\sigma \le \overline{x}_1 - m \le \sigma\right) \\ &= \mathrm{P}\left(\left|\overline{x}_1 - m\right| \le \sigma\right) \end{aligned}$$
이다. 이때 $\overline{x}_1$ 은 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \left(\frac{\sigma}{\sqrt{9}}\right)^2\right)$ 을 따르므로
이를 표준화시키면 $Z = \dfrac{\overline{x}_1 - m}{\frac{\sigma}{3}} = \left(\overline{x}_1 - m\right) \times \frac{3}{\sigma}$ 이다.

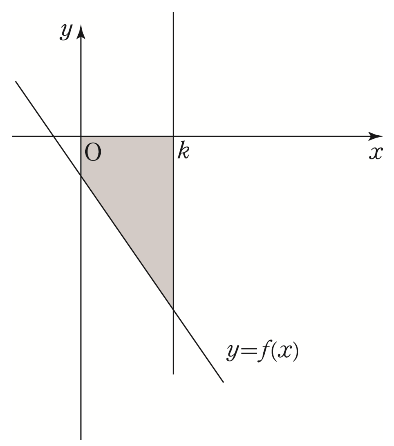
따라서
$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(\left|\overline{x}_1 - m\right| \le \sigma\right) &= \mathrm{P}\left(\left|\overline{x}_1 - m\right| \times \frac{3}{\sigma} \le \sigma \times \frac{3}{\sigma}\right) \\ &= \mathrm{P}\left(|Z| \le 3\right) \end{aligned}$$
이다. 문제의 조건에 의하여 $\mathrm{P}(|Z| \le 3) = 0.99$ 이므로
$p_1 = \mathrm{P}(|Z| \le 3) = 0.99$ 이다.

이제 p_2 를 고려하자.
$$\begin{aligned} p_2 &= \mathrm{P}\left(\overline{x}_2 - \frac{\sigma}{2} \le m \le \overline{x}_2 + \frac{\sigma}{2}\right) \\ &= \mathrm{P}\left(-\frac{\sigma}{2} \le m - \overline{x}_2 \le \frac{\sigma}{2}\right) \\ &= \mathrm{P}\left(-\frac{\sigma}{2} \le \overline{x}_2 - m \le \frac{\sigma}{2}\right) \\ &= \mathrm{P}\left(\left|\overline{x}_2 - m\right| \le \frac{\sigma}{2}\right) \end{aligned}$$
이다. 이때 $\overline{x}_2$ 는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$ 을 따르므로
이를 표준화시키면 $Z = \dfrac{\overline{x}_2 - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \left(\overline{x}_2 - m\right) \times \frac{\sqrt{n}}{\sigma}$ 이다.
따라서
$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(\left|\overline{x}_2 - m\right| \le \frac{\sigma}{2}\right) &= \mathrm{P}\left(\left|\overline{x}_2 - m\right| \times \frac{\sqrt{n}}{\sigma} \le \frac{\sigma}{2} \times \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right) \\ &= \mathrm{P}\left(|Z| \le \frac{\sqrt{n}}{2}\right) \end{aligned}$$
이다. $\frac{p_2}{p_1} = \frac{95}{99}$ 가 되어야 하므로 $p_2 = 0.95$ 이다. $(\because p_1 = 0.99)$
이때 문제의 조건에 의하여 $\mathrm{P}(|Z| \le 2) = 0.95$ 이므로 $\frac{\sqrt{n}}{2} = 2$ 이다.
따라서 구하는 자연수 n 의 값은 $\sqrt{n} = 4$ 에서 $n = 16$ 이다.

29) [정답] 2　(출제자 : 17 김정빈)

[출제의도] 적분과 넓이의 관계를 파악하고, 이를 미지수를 찾아내는 데에 활용할 수 있는가?

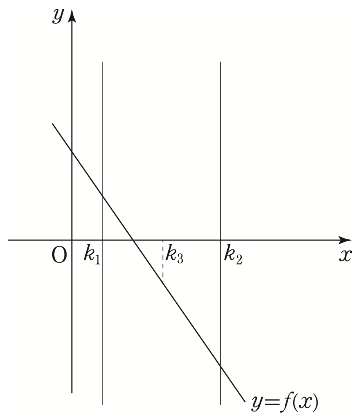
[해설]
$f(x) = ax + b$ $(a < 0)$ 라 하자.
$b \le 0$ 일 때의 경우를 그림으로 그려보면 다음과 같다.



그림을 보면 임의의 양의 실수 k 에 대하여 $\int_0^k f(t)\,dt < 0$ 임을 알 수 있다.
이 경우 $\int_0^{k_1} f(t)\,dt < 0$, $\int_0^{k_2} f(t)\,dt < 0$ 에서 $-\int_0^{k_2} f(t)\,dt > 0$ 이다.
이는 $\int_0^{k_1} f(t)\,dt = -\int_0^{k_2} f(t)\,dt$ 에 모순이다.
따라서 $b > 0$ 이다.

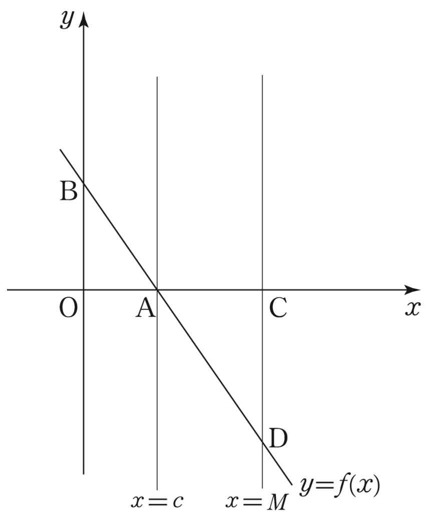
$\int_{k_1}^{x} f(t)\,dt = 0$ 을 만족시키는 실수 x 의 최댓값을 k_3 라 하자.

이때 두 양의 실수 k_1, k_2 에 대하여 $\int_0^{k_1} f(t)\,dt = -\int_0^{k_2} f(t)\,dt$ 를 만족시킬 수 있는 상황을 그림으로 그려보면 다음과 같다.



그림에서 k_1 의 값에 따라 k_2 의 값이 변함을 알 수 있으며
k_1 의 값이 직선 $y = f(x)$ 의 x 절편일 때, k_2 의 값이 최대임을 알 수 있다.
([보충] 참고)

직선 $y = f(x)$ 의 x 절편을 c, k_2 의 최댓값을 M, 네 점 A, B, C, D 를 각각 $\mathrm{A}(c, 0)$, $\mathrm{B}(0, b)$, $\mathrm{C}(M, 0)$, $\mathrm{D}(M, f(M))$ 이라 하자.



$\int_0^{c} f(t)\,dt = S$ 라 하자.

이때 문제의 조건에 의하여 $\int_0^{M} f(t)\,dt = -S$ 이므로

$\int_c^{M} f(t)\,dt = \int_0^{M} f(t)\,dt - \int_0^{c} f(t)\,dt = -2S$ 이다.

따라서 삼각형 OAB 와 삼각형 ADC 의 넓이의 비는 $1 : 2$ 이고

이에 따라 닮음비는 $1 : \sqrt{2}$ 이다.

이때 $\overline{\mathrm{AC}} = \sqrt{2} \times \overline{\mathrm{OA}}$ 에서 $\overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{OC}} - \overline{\mathrm{OA}}$ 이고

$\overline{\mathrm{OC}} = M$, $\overline{\mathrm{OA}} = c$ 이므로 $\overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{OC}} - \overline{\mathrm{OA}} = M - c = \sqrt{2}\,c$ 이다.

따라서 $M = (\sqrt{2} + 1)c$ 이다. $\cdots$ ㉠

이제 $f(M) = -\int_0^{M} |f(t)|\,dt$ 라는 조건을 이용해보자.

$\int_0^{M} |f(t)|\,dt = \int_0^{c} f(t)\,dt - \int_c^{M} f(t)\,dt = S - (-2S) = 3S$ 이므로

$f(M) = -3S$ 이다.

위에서 삼각형 OAB 와 삼각형 ADC 의 닮음비가 $1 : \sqrt{2}$ 임을 알 수 있으므로 $\overline{\mathrm{OB}} : \overline{\mathrm{CD}} = 1 : \sqrt{2}$ 이다.

즉 $\overline{\mathrm{CD}} \times 1 = \sqrt{2} \times \overline{\mathrm{OB}}$ 이므로 $\overline{\mathrm{OB}} = \dfrac{\overline{\mathrm{CD}}}{\sqrt{2}}$ 이고

이때 $\overline{\mathrm{CD}} = -f(M) = 3S$ 이므로 $\overline{\mathrm{OB}} = \dfrac{3}{\sqrt{2}}S$ 이다.

한편, 삼각형 OAB 의 넓이가 S 임을 이용하면

$S = \overline{\mathrm{OA}} \times \overline{\mathrm{OB}} \times \dfrac{1}{2} = \overline{\mathrm{OA}} \times \dfrac{3}{\sqrt{2}}S \times \dfrac{1}{2}$ 이다.

정리하면 $\overline{\mathrm{OA}} = c = \dfrac{2}{3}\sqrt{2}$ 이고

㉠에 $c = \dfrac{2}{3}\sqrt{2}$ 를 대입하면 $M = \dfrac{4}{3} + \dfrac{2}{3}\sqrt{2}$ 이다.

따라서 $p = \dfrac{4}{3}$, $q = \dfrac{2}{3}$ 이므로 $p + q = \dfrac{4}{3} + \dfrac{2}{3} = 2$ 이다.

[보충]

k_1 의 값이 직선 $y = f(x)$ 의 x 절편일 때, k_2 의 값이 최대인 이유를 알아보자.

직선 $y = f(x)$ 의 x 절편을 α 라 하고, $\int_0^{x} f(t)\,dt$ 의 부호가 바뀔 때의 x 의 값을 β $(\beta > 0)$ 이라 하자.

$\int_0^{\beta} f(t)\,dt = \int_0^{\alpha} f(t)\,dt + \int_\alpha^{\beta} f(t)\,dt = 0$ 이므로

$\int_0^{\alpha} f(t)\,dt = -\int_\alpha^{\beta} f(t)\,dt$ 이다. 두 적분 값을 각각 계산하면

$$\int_0^{\alpha} f(t)\,dt = \int_0^{\alpha} (at + b)\,dt = \left[\frac{1}{2}at^2 + bt\right]_0^{\alpha} = \frac{1}{2}a\alpha^2 + b\alpha$$

이고

$$\begin{aligned}-\int_\alpha^{\beta} f(t)\,dt &= -\int_\alpha^{\beta} (at + b)\,dt = -\left[\frac{1}{2}at^2 + bt\right]_\alpha^{\beta} \\ &= \left(\frac{1}{2}a\alpha^2 + b\alpha\right) - \left(\frac{1}{2}a\beta^2 + b\beta\right)\end{aligned}$$

이므로 $\dfrac{1}{2}a\alpha^2 + b\alpha = \dfrac{1}{2}a\alpha^2 + b\alpha - \dfrac{1}{2}a\beta^2 - b\beta$ 에서

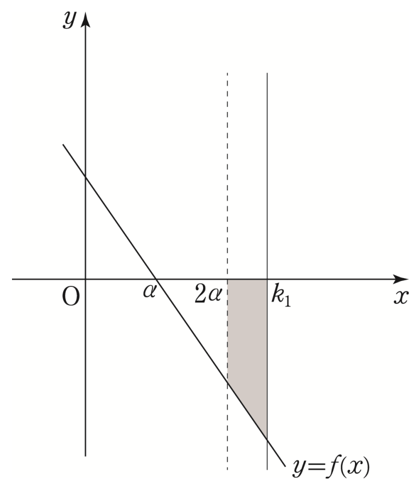
$\dfrac{1}{2}a\beta^2 + b\beta = 0$ 이다.

정리하면 $\beta\left(\dfrac{1}{2}a\beta + b\right) = 0$ 이고, $\beta > 0$ 이므로 $\beta = -\dfrac{2b}{a}$ 이다.

이때 $\alpha = -\dfrac{b}{a}$ 이므로 $\beta = 2\alpha$ 이다.

이제 k_1 의 값에 따라 k_2 의 값이 어떻게 변하는지 살펴보자.

(i) $k_1 > 2\alpha$ 인 경우



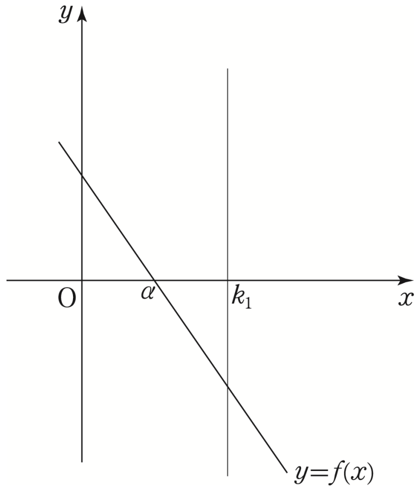
$\int_0^{k_1} f(t)\,dt = \int_0^{2\alpha} f(t)\,dt + \int_{2\alpha}^{k_1} f(t)\,dt = \int_{2\alpha}^{k_1} f(t)\,dt < 0$ 이므로

$\int_0^{k_1} f(t)\,dt = -\int_0^{k_2} f(t)\,dt$ 를 만족시키려면

$\int_0^{k_2} f(t)\,dt > 0$ 이어야 하고, 이는 $k_2 < 2\alpha$ 이어야 함을 의미한다.

즉, 이 경우 $k_1 > k_2$ 이지만 문제의 조건에서 $k_1 < k_2$ 이므로 모순이다.

(ii) $k_1 = 2\alpha$ 인 경우



$\int_0^{k_1} f(t)\,dt = \int_0^{2\alpha} f(t)\,dt = 0$ 이므로

$\int_0^{k_1} f(t)\,dt = -\int_0^{k_2} f(t)\,dt$ 를 만족시키려면

$\int_0^{k_2} f(t)\,dt = 0$ 이어야 하고, 이는 $k_2 = 2\alpha$ 이어야 함을 의미한다.

즉, 이 경우 $k_1 = k_2$ 이지만 문제의 조건에서 $k_1 < k_2$ 이므로 모순이다.

(iii) $k_1 < 2\alpha$ 인 경우

$\int_0^{k_1} f(t)\,dt > 0$ 이므로

$\int_0^{k_1} f(t)\,dt = -\int_0^{k_2} f(t)\,dt$ 를 만족시키려면

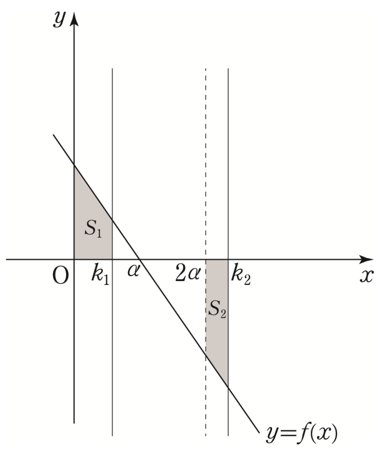
$\int_0^{k_2} f(t)\,dt < 0$ 이어야 하고, 이는 $k_2 > 2\alpha$ 이어야 함을 뜻한다.

따라서 문제의 조건인 $k_1 < k_2$ 를 만족시킨다.

$\int_0^{k_1} f(t)\,dt = S_1$, $\int_0^{k_2} f(t)\,dt = \int_{2\alpha}^{k_2} f(t)\,dt = S_2$ 라 하면

문제의 조건에 의하여 $S_1 + S_2 = 0$ 이다.

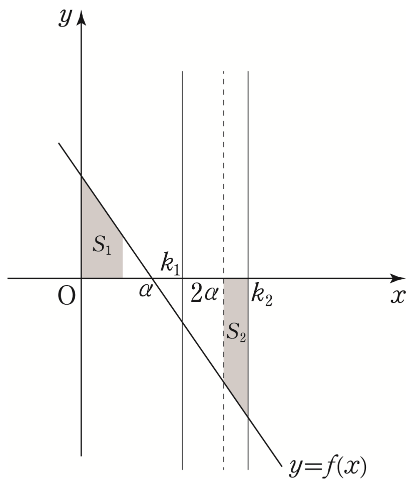
(1) $0 < k_1 \le \alpha$ 인 경우



k_1 의 값이 커지면 S_1 의 값이 커지고, 이에 따라 S_2 의 값은 작아져야 한다.

S_2 의 값이 작아진다는 것은 k_2 의 값이 커진다는 것을 의미한다.

(2) $\alpha \le k_1 < 2\alpha$ 인 경우



k_1 의 값이 커지면 S_1 의 값이 작아지고, 이에 따라 S_2 의 값은 커져야 한다.

S_2 의 값이 커진다는 것은 k_2 의 값이 작아진다는 것을 의미한다.

따라서 $k_1 = \alpha$ 일 때, 즉 k_1 의 값이 직선 $y = f(x)$ 의 절편일 때

k_2 는 최댓값을 갖는다.

30) [정답] 576 (출제자 : 17 김정빈, 17 문혁준, 18 안동우)

[출제의도] 정적분으로 정의된 함수의 미분을 통해 극대/극소를 파악하고 주어진 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]

$$g(x) = \int_x^{x+2} \{|f(t)|-1\}\,dt$$
$$= \int_0^{x+2} \{|f(t)|-1\}\,dt - \int_0^{x} \{|f(t)|-1\}\,dt$$

이므로 양변을 x 에 대하여 미분하면

$g'(x) = \{|f(x+2)|-1\} - \{|f(x)|-1\} = |f(x+2)| - |f(x)|$

이다.

미분가능한 함수는 도함수의 함숫값이 0 일 때 함숫값의 부호가

양에서 음으로, 혹은 그 반대로 변하면 그 지점에서 극값을 갖는다.

따라서 $g(x)$ 가 $x = t$ 에서 극대 또는 극소이려면

(1) $g'(t) = 0$ 이고 (2) $x = t$ 의 좌우에서 $g'(x)$ 의 부호가 변해야 한다.

(나) 조건에 의하여 (1)을 만족시키는 모든 t 가 (2)를 만족시키므로

방정식 $g'(x) = 0$ 의 모든 해의 좌우에서

$g'(x)$ 의 부호가 변해야 한다. …㉠

앞에서 $g'(x) = |f(x+2)| - |f(x)|$ 이므로, $x = 0$ 을 대입하면

(가) 조건에 의하여 $g'(0) = |f(2)| - |f(0)| = 0$ 이다.

따라서 (1)에 의하여 $x = 0$ 의 좌우에서 $g'(x)$ 의 부호가 변해야 한다.

그런데 ㉠이 성립하는 경우를 찾기 어려우므로

㉠이 성립하지 않는 경우를 제외하는 관점으로 생각해보자.

(가) 조건에 의하여 $f(0) = f(2) = 0$ 이고

절댓값은 음이 아닌 실수이므로 모든 실수 x 에 대하여

$|f(x+2)| \ge 0$, $|f(x)| \ge 0$ 을 만족시킨다.

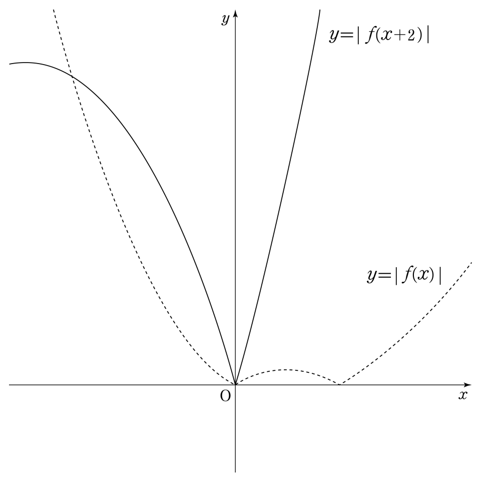
이때 $g'(x) = |f(x+2)| - |f(x)|$ 가 $x = 0$ 에서 함숫값이

0 이 되면서 부호가 변하지 않으려면 $x = 0$ 을 포함하는 어떤 구간에서

$|f(x+2)|$ 의 값이 전부 $|f(x)|$ 이상이거나

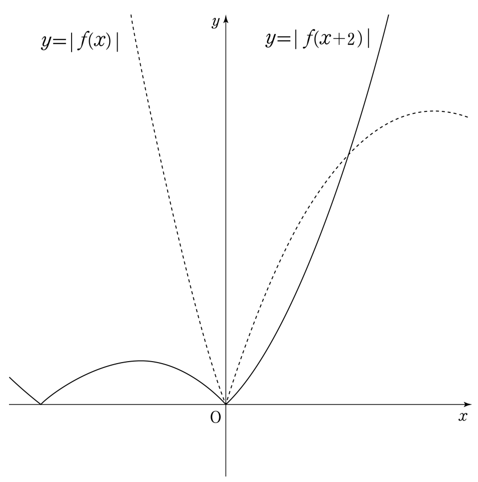
반대로 $|f(x)|$ 의 값이 전부 $|f(x+2)|$ 이상이어야 한다.

(ⅰ) $x=0$ 을 포함하는 어떤 구간에서 $|f(x+2)|$ 의 값이 전부 $|f(x)|$ 이상인 경우
두 곡선 $y=|f(x)|$, $y=|f(x+2)|$ 를 좌표평면에 겹쳐 그려보면 다음 그림과 같다.



여기서 $|f'(2)|>|f'(0)|$ 이다.

(ⅱ) $x=0$ 을 포함하는 어떤 구간에서 $|f(x)|$ 의 값이 전부 $|f(x+2)|$ 이상인 경우
두 곡선 $y=|f(x)|$, $y=|f(x+2)|$ 를 좌표평면에 겹쳐 그려보면 다음 그림과 같다.



여기서 $|f'(2)|<|f'(0)|$ 이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $|f'(2)|\neq|f'(0)|$ 일 때는 ㉠을 만족시키지 못하므로 (나) 조건을 만족시키지 못한다.
그러므로 $|f'(2)|=|f'(0)|$ 을 만족시키는 α 에 대해서만 (나) 조건을 만족시키는지 확인해도 충분하다.

(가) 조건에 의하여 $f(x)=kx(x-2)(x-\alpha)$ $(k>0)$ 이라 할 수 있다. (단, α, k 는 실수)
$f(x)=kx(x-2)(x-\alpha)$ $(k>0)$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면
$f'(x)=k(x-2)+k(x-2)(x-\alpha)+kx(x-\alpha)$ 이므로
$x=0$, $x=2$ 를 각각 대입하면
$f'(2)=2k(2-\alpha)$, $f'(0)=2k\alpha$ 이다. 따라서

$$|f'(2)|=|2k(2-\alpha)|=2k|2-\alpha|$$

이고

$$|f'(0)|=|2k\alpha|=2k|\alpha| \quad (\because k>0)$$

이다. $|f'(2)|=|f'(0)|$ 에서 $|2-\alpha|=|\alpha|$ 이다.
$|2-\alpha|=|\alpha|$ 를 만족시키는 α 가 $|f'(2)|=|f'(0)|$ 을 만족시키는 α 이므로, 이 α 의 값을 구해보자.

① $\alpha\le 0$ 인 경우
$2-\alpha\ge 0$ 이므로 $|2-\alpha|=2-\alpha$, $|\alpha|=-\alpha$ 이다.
따라서 $2-\alpha=-\alpha$ 이므로 $2=0$ 이 되고, 이는 성립하지 않으므로 이 경우에는 가능한 α 가 존재하지 않는다.

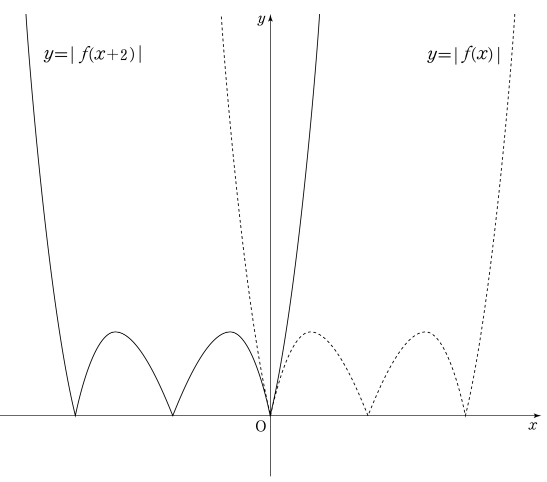
② $0<\alpha<2$ 인 경우
$2-\alpha>0$ 이므로 $|2-\alpha|=2-\alpha$, $|\alpha|=\alpha$ 이다.
$2-\alpha=\alpha$ 이므로 $2\alpha=2$, $\alpha=1$ 이다.

③ $\alpha\ge 2$ 인 경우
$2-\alpha\le 0$ 이므로 $|2-\alpha|=\alpha-2$, $|\alpha|=\alpha$ 이다.
따라서 $\alpha-2=\alpha$ 이므로 $-2=0$ 이 되고, 이는 성립하지 않으므로 이 경우에는 가능한 α 가 존재하지 않는다.

① ~ ③에서 $|f'(2)|=|f'(0)|$ 을 만족시키는 α 는 1 뿐이라는 것을 알 수 있다.

$\alpha\neq 1$ 인 α 는 ㉠을 만족시키지 못하므로, $\alpha=1$ 이 (나) 조건을 만족시키는지 확인하자.

$f(x)=kx(x-1)(x-2)$, $f(x+2)=kx(x+1)(x+2)$ $(k>0)$ 이므로
두 곡선 $y=|f(x+2)|$ 와 $y=|f(x)|$ 를 좌표평면에 겹쳐 그려보면 다음 그림과 같다.



앞에서 $\alpha=1$ 일 때 $|f'(2)|=|f'(0)|$ 임을 밝혔으므로
$x<0$ 에서 $g'(x)=|f(x+2)|-|f(x)|<0$,
$x>0$ 에서 $g'(x)=|f(x+2)|-|f(x)|>0$ 이고
$x=0$ 에서 $g'(0)=0$ 이다.

$\alpha=1$ 일 때 방정식 $g'(x)=0$ 는 $x=0$ 이라는 1 개의 근을 갖고
$x<0$ 에서 $g'(x)<0$, $x>0$ 에서 $g'(x)>0$ 이므로
$g(x)$ 는 $x=0$ 에서 극솟값을 갖는다.
그림에서 방정식 $g'(x)=|f(x+2)|-|f(x)|=0$ 의 근의 개수가 1 임을 알 수 있고 함수 $g(x)$ 가 극대 또는 극소가 되는 지점의 개수도 1 이므로 $\alpha=1$ 에서 $g(x)$ 는 (나) 조건을 만족시킨다.
따라서 $f(x)=kx(x-1)(x-2)$ $(k>0)$ 이다.

함수 $g(x)$ 는 $x<0$ 에서 감소하고 $x>0$ 에서 증가하므로
결국 함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 최솟값 $g(0)$ 을 갖는다.
(다) 조건에서 모든 실수 x 에 대하여 $g(x)\ge 0$ 이라 하였고
$g(x)$ 의 최솟값은 $g(0)$ 이므로 $g(0)\ge 0$ 이면 (다) 조건이 성립한다.

$$
\begin{aligned}
g(0) &= \int_0^2 \{|kx(x-1)(x-2)|-1\}\,dx \\
&= \int_0^2 |kx(x-1)(x-2)|\,dx - 2 \\
&= \int_{-1}^1 |k(x-1)x(x+1)|\,dx - 2 \\
&= 2\int_{-1}^0 k(x^3-x)\,dx - 2 \\
&= 2k\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^0 - 2 \\
&= \frac{k}{2}-2
\end{aligned}
$$

이므로 $g(0) \ge 0$ 에 $g(0)=\frac{k}{2}-2$ 를 대입하면

$\frac{k}{2}-2 \ge 0$ 이므로 $k \ge 4$ 이다. $\cdots$ ㉡

$f(3)=k\times3\times2\times1=6k$ 이고 ㉡에 의하여 $6k \ge 24$ 이므로

$f(3) \ge 24$ 이고, $\{f(3)\}^2 \ge 576$ 이다.

따라서 $\{f(3)\}^2$ 의 최솟값은 576 이다.