2018학년도 D&T
6월 모의평가 해설지 (나형)

1	①	**2**	③	**3**	④	**4**	⑤	**5**	①
6	②	**7**	②	**8**	④	**9**	④	**10**	⑤
11	③	**12**	⑤	**13**	②	**14**	①	**15**	③
16	③	**17**	①	**18**	④	**19**	②	**20**	⑤
21	④	**22**	4	**23**	108	**24**	81	**25**	32
26	2	**27**	12	**28**	24	**29**	345	**30**	97

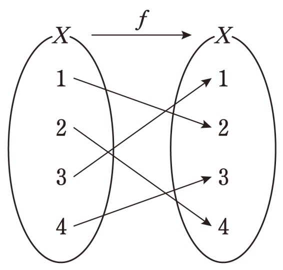
네이버 카페
'**웃솔루션**(http://cafe.naver.com/dntsolution)' 에서 D&T 6월 모의평가의 유사연계 문제지와 해설지를 무료로 제공하고 있습니다.

1.
$2^0 \times 4^{-1} = 1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

2.
$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$, $B = \{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16\}$에서
$A \cup B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 16\}$이므로
$n(A \cup B) = 7$이다.

3.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{8n^3+12n^2+6n+1}{n^3-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{8+\frac{12}{n}+\frac{6}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{1-\frac{1}{n^3}} = 8$$

4.
공차를 d라 할 때, $a_5 - a_2 = 14 - 5 = 3d$이므로
$d = 3$이다.

5.


함수 f가 일대일 대응이므로 $f(3) = 1$이다.
또, $f(1) = 2$이므로 $f(1) + f(3) = 3$이다.

6.
$2^n < 8^n(a_n - 1) < 4^n$에서 8^n으로 나누면
$\left(\frac{1}{4}\right)^n < a_n - 1 < \left(\frac{1}{2}\right)^n$ 이고, 1을 더하면
$\left(\frac{1}{4}\right)^n + 1 < a_n < \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1$ 이다.
$\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^n + 1\right\} \le \lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1\right\}$에서
답은 1이다.

7.
$7 = 1+1+1+1+1+1+1$
$= 1+1+1+1+1+2$
$= 1+1+1+2+2$
$= 1+2+2+2$
이므로 답은 4이다.

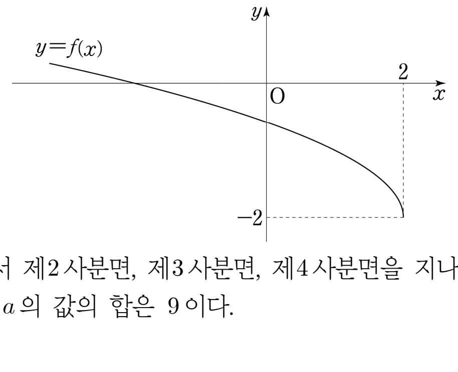
8.
$\lim_{x\to -1-} f(x) = 1$이고, $\lim_{x\to 1+} |f(x)| = 1$
이므로 $1+1 = 2$이다.

9.
$\log_2 a_3 + \log_2 a_7 = 8$에서 $\log_2(a_3 \times a_7) = 8$이다.
그러므로 $a_3 a_7 = 2^8$이고, 등비중항의 성질에 의하여
$a_5 = 2^4$이다. 수열 $\{a_n\}$의 공비는 2이므로
$a_6 = 2^4 \times 2 = 32$이다.

10.
구별이 안 되는 것은 새우초밥 두 개와 연어초밥 두 개이므로 구하고자 하는 방법의 수는
$\frac{6!}{2! \times 2!} = \frac{720}{4} = 180$가지이다.

11.
함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로
함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
그러므로 $\lim_{x\to 1-} f(x) = f(1)$에서
$1 + a + b = 1$ …… ㉠ 이다.
함수 $f(x)$의 도함수는
$f'(x) = \begin{cases} 2x + a & (x < 1) \\ 0 & (x > 1) \end{cases}$이고, 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로
$\lim_{x\to 1-} f'(x) = \lim_{x\to 1+} f'(x)$이다.
따라서 $2 + a = 0$ …… ㉡ 이고,
㉠, ㉡을 연립하면 $a = -2$, $b = 2$이다.
$\therefore\ f(-1) = 1 + 2 + 2 = 5$

12.
함수 $f(x)$를 $f(x) = \sqrt{2-x} - 2$라 할 때, 이 함수의 그래프를 그려보기 위해서 x절편을 찾아보면 -2이고 y절편은 $\sqrt{2}-2$이다.
한편, 점 $(2,\ -2)$를 지난다. 그래프를 그려보면 다음과 같다.



따라서 제2사분면, 제3사분면, 제4사분면을 지나므로 모든 a의 값의 합은 9이다.

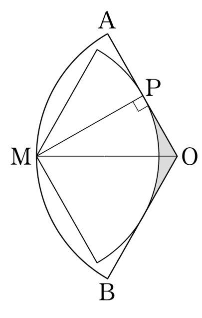
13.
ㄱ. [반례] $x = -1$이면 $x^2 = 1$이지만
$x \ne 1$이다. (X)
ㄴ. $x < 1$에서 양 변에 y를 더하면
$x + y < 1 + y < 4$이므로 $x + y < 4$이다. (O)
ㄷ. [반례] $x = -1$, $y = 2$이면 $x + y > 0$이지만
$xy = -2 < 0$이다. (X)

14.
유리함수 $y = \frac{a}{x-p} + q$ $(a \ne 0)$의 역함수는
$y = \frac{a}{x-q} + p$이므로 어떤 유리함수와 그 역함수의 그래프가 서로 일치하려면 $p = q$이어야 한다. 즉,
함수 $f(x) = \frac{x}{x-2} + k$의 역함수 $g(x)$에 대하여
두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프가 일치하기 위해선
유리함수 $f(x)$의 그래프의 두 점근선의 교점이 직선 $y = x$ 위에 있어야 한다.
$f(x) = \frac{x}{x-2} + k = \frac{2}{x-2} + 1 + k$이므로 두 점근선의 교점은 $(2,\ 1+k)$이다. 이 점이 직선 $y = x$ 위에 있으므로 $k + 1 = 2 \Leftrightarrow k = 1$이다.

15.
곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(2,\ f(2))$에서의 접선의 방정식이 $y = 2x - 1$이므로 $f(2) = 3$, $f'(2) = 2$이다.
$g(x) = (x-1)f(x)$의 양변을 x에 대하여 미분하면,
$g'(x) = f(x) + (x-1)f'(x)$이고, 곡선 $y = g(x)$ 위의 점 $(2,\ g(2))$에서의 접선의 기울기는 $g'(2)$이므로
$g'(2) = f(2) + f'(2) = 5$이다.

16.
ⅰ)에서 $x' + y' + z'$의 값이 정수이므로 부등식
$7 \le 2(x' + y' + z') \le 8$을 만족시키려면
$x' + y' + z' = 4$이어야 한다.
x', y', z'은 모두 음이 아닌 정수이므로
$p = {}_3H_4 = {}_6C_4 = 15$이다.
마찬가지로 ⅱ)에서 부등식
$6 \le 2(x' + y' + z') \le 7$을 만족시키려면
$x' + y' + z' = 3$이어야 한다.
x', y', z'은 모두 음이 아닌 정수이므로
$q = {}_3H_3 = {}_5C_3 = 10$이다.
따라서 $N = 15 + 10 = 25$이다.
$\therefore\ \frac{pq}{r} = \frac{150}{25} = 6$

17.
그림 R_1에서 반지름의 길이가 작은 부채꼴의 반지름의 길이를 구하자. 반지름의 길이가 작은 부채꼴은 부채꼴 OAB에 접하므로 한 접점을 P라 하면 삼각형 OMP는 직각삼각형이고,
$\angle MOP = 60^\circ$이므로 $\overline{MP} = \frac{\sqrt{3}}{2}$이다.



색칠된 부분의 넓이는 빗변의 길이가 1이고, 한 내각의 크기가 60°인 직각삼각형 두 개의 넓이의 합에서 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{3}}{2}$이고 중심각이 60°인 부채꼴의 넓이를 뺀 것이다. 따라서 첫째항의 값은
$\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{8}$이다.
첫 번째 부채꼴의 반지름의 길이가 1이고 두 번째 부채꼴의 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 이 두 부채꼴의 반지름의 길이의 비는 $\frac{\sqrt{3}}{2}$이다. 따라서

넓이의 비인 공비는 $\frac{3}{4}$이다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{8}}{1-\frac{3}{4}} = \sqrt{3}-\frac{\pi}{2}$$

18.

우선 전체 경우의 수를 구하면 서로 다른 5개의 수 중 4개의 수를 택하여 나열하는 경우의 수이므로 ${}_5P_4=120$이다.

주어진 조건에서 백의 자리의 수가 2개의 조건으로 맞물려 있으므로 백의 자리의 수를 짝수와 홀수로 분류하여 구해 보자.

i) 백의 자리의 수가 짝수일 때,

천의 자리의 수가 어떤 수가 오든지 천의 자리의 수와 백의 자리의 수의 곱은 짝수이고,

백의 자리의 수와 일의 자리의 수의 합이 홀수가 되려면 일의 자리의 수는 홀수이어야 한다.

백의 자리의 수를 선택하는 경우의 수 : ${}_2C_1$

일의 자리의 수를 선택하는 경우의 수 : ${}_3C_1$

나머지 자리의 수들(천의 자리와 십의 자리)을 선택하는 경우의 수 : ${}_3P_2$

따라서 ${}_2C_1\times{}_3C_1\times{}_3P_2=36$

ii) 백의 자리의 수가 홀수일 때,

천의 자리의 수는 짝수이어야 하고, 백의 자리의 수와 일의 자리의 수의 합이 홀수가 되려면 일의 자리의 수는 짝수이어야 한다.

천의 자리의 수와 일의 자리의 수를 선택하는 경우의 수 : ${}_2P_2$

백의 자리의 수를 선택하는 경우의 수 : ${}_3C_1$

나머지 자리의 수(십의 자리)를 선택하는 경우의 수 : ${}_2C_1$

따라서 ${}_2P_2\times{}_3C_1\times{}_2C_1=12$

그러므로 주어진 조건을 만족시키킬 확률은

$\frac{48}{120}=\frac{2}{5}$이다.

19.

(가) 조건에서 모든 실수 x에 대하여 부등식

$x^2-(a+b)x+ab\geq 0 \iff (x-a)(x-b)\geq 0$을

만족시키기 위해서는 $a=b$이어야 한다.

(나) 명제가 거짓이므로 명제를 부정한 것은 참이 된다.

명제를 부정하면

'모든 실수 x에 대하여 부등식

$(a+2)(ax+a-2)\geq(b+2)(x-b+2)-4$가 성립한다.'

이고, 이는 참인 명제이다. 이 부등식을 정리해보자.

$a(a+2)x+(a+2)(a-2)\geq(b+2)x-(b-2)(b+2)-4$

를 정리하면

$(a^2+2a-b-2)x\geq 4-a^2-b^2$이다.

모든 실수 x에 대하여 $px\geq q$를 만족시키기 위한 조건은 $p=0$이고 $q\leq 0$이다.

따라서 $a^2+2a-b-2=0$이고, $4-a^2-b^2\leq 0$이다.

$a=b$이므로 대입하여 정리하면

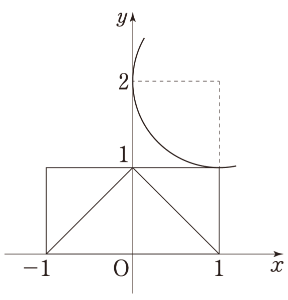
$a^2+a-2=0$과 $2a^2\geq 4$를 만족하는 a의 값은

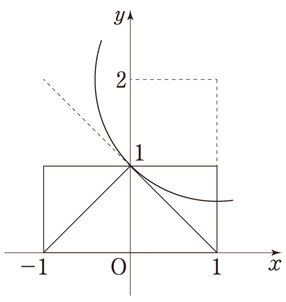
$a=-2$이다.

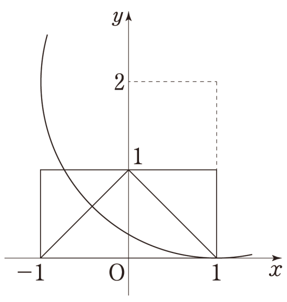
그러므로 $a+b=-4$이다.

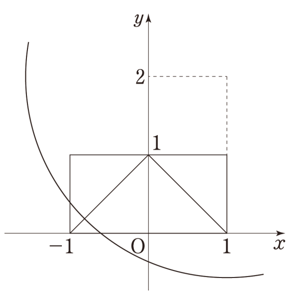
20.

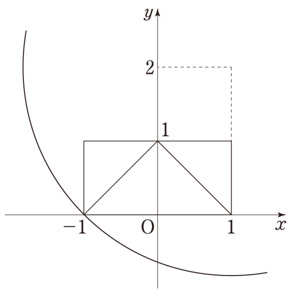
r이 증가함에 따라 나타나는 형태는 다음과 같다.

①


②


③


④


⑤


$0<r<1$일 때, $f(r)=0$

$r=1$일 때, $f(r)=1$ ⋯ ①,

$1<r<\sqrt{2}$ 일 때, $f(r)=2$,

$r=\sqrt{2}$ 일 때, $f(r)=2$ ⋯ ②,

$\sqrt{2}<r<2$일 때, $f(r)=4$,

$r=2$일 때, $f(r)=3$ ⋯ ③,

$2<r<2\sqrt{2}$ 일 때, $f(r)=3$ ⋯ ④,

$r=2\sqrt{2}$ 일 때, $f(r)=1$ ⋯ ⑤,

$r>2\sqrt{2}$ 일 때, $f(r)=0$이다.

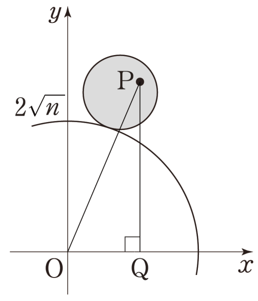
그러므로 함수 $f(r)$가 $r=\alpha$에서 불연속일 때,

가능한 모든 α^2의 값의 합은 $1+2+4+8=15$이다.

* 주의 : 함수 $f(r)$는 $r=\sqrt{5}$에서는 연속이다.

21.

점 P, Q, 반지름의 길이가 1인 원의 위치는 다음과 같다.



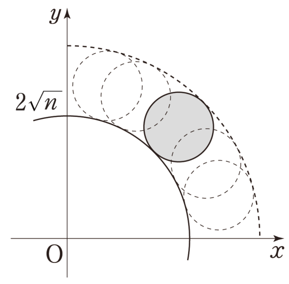
점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면 삼각형 OPQ의 넓이는

$\frac{xy}{2}=k$이다.

이때, y에 대하여 나타내면 $y=\frac{2k}{x}$이다. 즉 점 P는

유리함수 $y=\frac{2k}{x}$의 그래프 위에 존재한다.

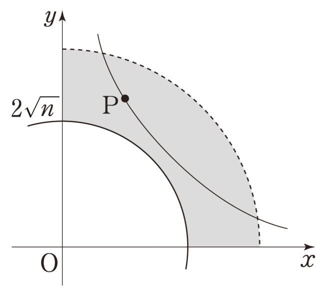
한편 원 C가 움직임에 따라 다음의 점선과 같이 움직이는 영역이 존재한다.



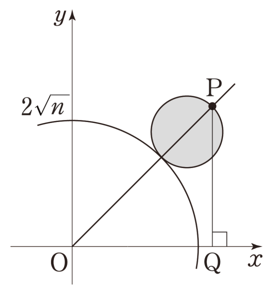
점 P가 나타내는 영역은 다음의 색칠된 부분과

같으며 a_n의 값을 구하기 위해 유리함수 $y=\frac{2k}{x}$의

그래프의 개형을 이용하여 k의 값이 최대인 경우를 찾아야 한다.



이때, k가 최대가 되려면 원 C의 중심이 직선 $y=x$ 위에 있고 동시에 점 P 또한 직선 $y=x$ 위에 있을 때이다.



선분 OP의 길이는 $2\sqrt{n}+2$이고, $\overline{PQ}=\overline{OQ}$이므로

$\overline{PQ}=\overline{OQ}=\sqrt{2n}+\sqrt{2}$ 이다.

따라서 자연수 k의 최댓값은

$\frac{1}{2}\times(\sqrt{2n}+\sqrt{2})^2=n+2\sqrt{n}+1$보다 크지 않은

최대의 자연수이다.

따라서 $a_n=[n+2\sqrt{n}+1]=n+1+[2\sqrt{n}]$ 이다.

(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수)

$[2\sqrt{n}]=[\sqrt{4n}]$에서

$1\leq n\leq 2$일 때, $[\sqrt{4n}]=2$

$n=3$일 때, $[\sqrt{4n}]=3$

$4\leq n\leq 6$일 때, $[\sqrt{4n}]=4$

$7\leq n\leq 8$일 때, $[\sqrt{4n}]=5$

$9\leq n\leq 12$일 때, $[\sqrt{4n}]=6$

$n=13$일 때, $[\sqrt{4n}]=7$

이므로

$\sum_{n=1}^{13} a_n = \sum_{n=1}^{13}(n+1+[2\sqrt{n}\,])$

$=\frac{13\times 14}{2}+13+$

$((2\times 2)+3+(4\times 3)+(5\times 2)+(6\times 4)+7)$ 이므로

답은 164 이다.

22.

$f'(x)=4x^3-8x$ 이므로 $f'(-1)=-4+8=4$

23.

${}_4\mathrm{C}_n\times(x^3)^n\times\left(\frac{3}{x}\right)^{4-n}={}_4\mathrm{C}_n\times 3^{4-n}\times x^{4n-4}$

이므로 $n=1$ 을 대입하면 상수항을 알 수 있다.

따라서 상수항은 ${}_4\mathrm{C}_1\times 3^3=4\times 27=108$ 이다.

24.

$x^2-4x-5=(x-5)(x+1)=0$ 에서 $\alpha<\beta$ 라 하면,

$\log_3\alpha=-1$, $\log_3\beta=5$ 이다. 그러므로 $\alpha=\frac{1}{3}$,

$\beta=243$ 이다.

$\therefore\ \alpha\beta=81$

별해)

방정식 $x^2-4x-5=0$ 의 두 근의 합은

$\log_3\alpha+\log_3\beta=4$ 이므로 $\log_3\alpha\beta=4$ 이다.

$\therefore\ \alpha\beta=81$

25.

서로 다른 종류의 볼펜 5개를 두 사람 A, B 에게 남김없이 나누어 주는 방법의 수는 서로 다른 볼펜 2개에서 중복을 허락하여 5개를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 중복순열의 수와 같다.

${}_2\Pi_5=2^5$ 에서 답은 32 이다.

26.

$f(g^{-1}(6))$ 을 구하는 문제이므로 $g^{-1}(6)=k$ 라 하자.

역함수의 정의에 의하여 $g(k)=6$ 이다.

따라서 $f(k+2)-6=6$ 이므로 $f(k+2)=12$ 에서

$(k+2)^2+(k+2)=12$ 이다. 식을 정리하면

$k^2+5k-6=0$ 에서

$k=1$ 또는 $k=-6$ 이다. 문제의 조건에서 집합 X는 양의 실수 전체이므로 $k=-6$ 이 될 수 없다. 따라서 $k=1$ 이다. $f(g^{-1}(6))=f(1)=2$

27.

$f(x)=g(x)$

$\Leftrightarrow\ x^3+x+2=6x^2-8x+n$

$\Leftrightarrow\ x^3-6x^2+9x+2=n$

이므로 함수 $h(x)$ 를 $h(x)=x^3-6x^2+9x+2$ 라 하면,

$h'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$ 에서

함수 $h(x)$ 는 $x=1$ 에서 극댓값 6 을 갖고, $x=3$ 에서 극솟값 2 를 갖는다.

그러므로 방정식 $f(x)=g(x)$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3 이 되도록 하는 모든 자연수 n 의 값은

3, 4, 5 이다.

$\therefore\ 3+4+5=12$

28.

갑이 두 주머니 중 임의로 한 주머니를 선택하여 모든 카드를 꺼낼 때까지 카드를 꺼내는 시행을 할 때,

두 번째 시행에서 4가 적힌 카드가 나오는 사건을 A 라 하고, 갑이 주머니 B 를 선택하는 사건을 B 라 하자. 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(B\cap A)}{\mathrm{P}(A)}$ 이다.

1) 갑이 주머니 A 를 선택할 경우

갑은 여섯 번의 시행을 해야 하므로

전체 경우의 수는 $6!=720$ 이다.

두 번째 시행에서 4가 나오는 경우의 수는

$5!=120$ 이다. 따라서 주머니 A 를 선택할 때,

두 번째 시행에서 4가 적힌 카드가 나올 확률은

$\frac{1}{2}\times\frac{120}{720}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$ 이다.

2) 갑이 주머니 B 를 선택할 경우

갑은 세 번의 시행을 해야 하므로

전체 경우의 수는 ${}_6\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_2=90$ 이다.

두 번째 시행에서 4가 나오는 경우의 수는

두 번째 시행에서 4와 같이 나올 수 있는 카드의 수가 5이고, 나머지 두 시행 (첫 번째, 세 번째)에서 카드를 꺼내는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_2=6$ 이므로

$5\times 6=30$ 이다. 따라서 주머니 B 를 선택할 때,

두 번째 시행에서 4가 적힌 카드가 나올 확률은

$\frac{1}{2}\times\frac{30}{90}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ 이다.

따라서 1), 2)에 의하여 $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{12}+\frac{1}{6}=\frac{1}{4}$ 이고,

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$ 이므로 $\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(B\cap A)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{2}{3}$ 이다.

$\therefore\ 36p=24$

29.

$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$, $B-A=\{7,\ 8,\ 9\}$ 이므로

$A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$ 이다.

집합 X가 $(A\cap B)\cup X=(A\cup B)\cap X$ … ㉠을 만족시켜야 하는데,

집합 X가 집합 $A\cap B$ 의 원소를 포함하지 않으면, 주어진 조건 ㉠에 모순이고,

집합 X가 집합 $A\cup B$ 의 원소 이외의 원소를 포함하면, 주어진 조건 ㉠에 모순이다.

따라서 $(A\cap B)\subset X\subset(A\cup B)$ 를 만족시켜야 한다.

즉, 집합 X는 집합 $A\cup B$ 의 부분집합이면서 집합 $A\cap B$ 의 모든 원소를 포함한다.

이때 모든 집합 X의 개수가 $64=2^6$ 이므로

집합 $(A\cup B)-(A\cap B)$ 의 원소의 개수가 6 이 되어야 한다. 따라서 $n(A\cap B)=3$ 이다.

그러므로 집합 B 의 모든 원소의 합이 될 수 있는 값은

$(1+2+3)+(7+8+9)$,

$(1+2+4)+(7+8+9)$,

$\cdots$,

$(4+5+6)+(7+8+9)$ 이므로 나열한 항의 개수는

$1+2+3=6$ 부터 $4+5+6=15$ 까지의 자연수의 개수인 10 이다. 따라서 모든 a 의 값의 합은

$(6+7+\cdots+15)+10\times 24=\frac{10(6+15)}{2}+240=345$

이다.

30.

곡선 $y=f(x)$ 는 원점을 지나므로 $f(0)=0$ 이다.

(나) 조건을 부등식으로 나타내면,

$\frac{f(x_1)}{x_1}\le 0\le\frac{f(x_2)}{x_2}$ 이다.

$x_1<0$ 이므로 $f(x_1)\ge 0$ 이고,

$x_2>0$ 이므로 $f(x_2)\ge 0$ 이다.

또한, $f(0)=0$ 이므로

함수 $f(x)$ 는 모든 실수 x 에 대하여 $f(x)\ge 0$ 이다.

그러므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극솟값을 갖고,

$f'(0)=0$ 이라 할 수 있다.

$f(x)=x^2(x^2+ax+b)$ 라 하면 $x^2\ge 0$ 이므로

$x^2+ax+b\ge 0$ 이어야 한다.

따라서 $a^2-4b\le 0$ 이다.

즉, $b\ge\frac{1}{4}a^2$ 을 만족시키는 두 실수 a, b 의 순서쌍 $(a,\ b)$ 의 영역으로 해석할 수 있다.

이때 $f'(x)=2x(x^2+ax+b)+x^2(2x+a)$ 에서

$f'(2)=32+12a+4b$ 이므로 $f'(2)=k$ 라 두면

$b=-3a+\frac{k-32}{4}$ 이다. 부등식 $b\ge\frac{1}{4}a^2$ 의 영역을 만족시키는 k 의 최솟값은 영역 $y\ge\frac{1}{4}x^2$ 중

직선 $y=-3x+\frac{k-32}{4}$ 에서의 y 절편이 최소가 되는 순간의 k 의 값과 같다.

$y=\frac{1}{4}x^2$ 에서 $y'=\frac{1}{2}x$ 이므로

곡선 $y=\frac{1}{4}x^2$ 위의 점에서의 접선의 기울기가 -3 인 x 의 값을 찾으면, $\frac{1}{2}x=-3$ 에서 $x=-6$ 이다.

즉, 곡선 $y=\frac{1}{4}x^2$ 과 직선 $y=-3x+\frac{k-32}{4}$ 이 접할 때의 접점의 좌표는 $(-6,\ 9)$ 이므로

$f'(2)$ 의 값이 최소일 때, $a=-6$, $b=9$ 이다.

따라서 $f'(2)$ 의 값이 최소일 때

함수 $f(x)=x^2(x^2-6x+9)$ 이고,

$f'(x)=4x^3-18x^2+18x=2x(2x^2-9x+9)$

$=2x(2x-3)(x-3)$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x=\frac{3}{2}$ 에서 극댓값 $\frac{81}{16}$ 을 갖는다.

$\therefore\ p+q=97$

별해) 평균값 정리를 통해 $f'(0)$ 의 값을 구해보자.

함수 $f(x)$ 는 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

열린 구간 $(x_1,\ 0)$ 에 $f'(c_1)=\frac{f(x_1)}{x_1}$ 을 만족시키는 실수 c_1 이 존재하고, 열린 구간 $(0,\ x_2)$ 에

$f'(c_2)=\frac{f(x_2)}{x_2}$ 를 만족시키는 실수 c_2 가 존재한다.

이때 $\frac{f(x_1)}{x_1}\le 0\le\frac{f(x_2)}{x_2}$ 이므로

$f'(c_1)\le 0$ 이고, $f'(c_2)\ge 0$ 인데,

$x_1\to 0-$ 일 때, $c_1\to 0-$ 이고,

$x_2\to 0+$ 일 때, $c_2\to 0+$ 이다.

따라서 $f'(0)\le 0$, $f'(0)\ge 0$ 이므로 $f'(0)=0$ 이다.