공부하다

박수칠 수학

기본서

2017학년도 수능/모평 가형

미적분Ⅱ 주요 문제 해설

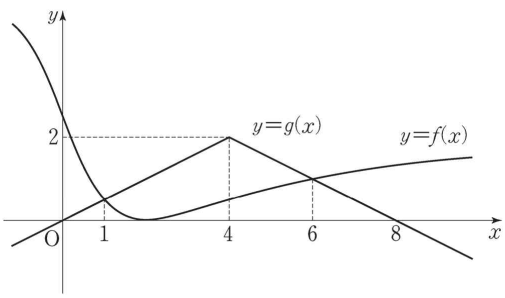
1 [2017학년도 6월 모평 가형 #15]

두 함수 $f(x)=\sin^2 x$, $g(x)=e^x$에 대하여

$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{g(f(x))-\sqrt{e}}{x-\dfrac{\pi}{4}}$ 의 값을 구하시오. [4점]

2 [2017학년도 6월 모평 가형 #20]

함수 $f(x)=\dfrac{5}{2}-\dfrac{10x}{x^2+4}$와 함수 $g(x)=\dfrac{4-|x-4|}{2}$의 그래프가 그림과 같다.



$0 \le a \le 8$인 a에 대하여 $\int_0^a f(x)\,dx+\int_a^8 g(x)\,dx$의 최솟값은? [4점]

① $14-5\ln 5$ ② $15-5\ln 10$ ③ $15-5\ln 5$
④ $16-5\ln 10$ ⑤ $16-5\ln 5$

3 [2017학년도 6월 모평 가형 #21]

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x) \ne 1$
(나) $f(x)+f(-x)=0$
(다) $f'(x)=\{1+f(x)\}\{1+f(-x)\}$

〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고르시오. [4점]

〈보 기〉

ㄱ. 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \ne -1$이다.
ㄴ. 함수 $f(x)$는 어떤 열린 구간에서 감소한다.
ㄷ. 곡선 $y=f(x)$는 세 개의 변곡점을 갖는다.

4 [2017학년도 6월 모평 가형 #30]

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 상수 $a\,(0<a<2\pi)$와 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)=f(-x)$
(나) $\int_{x}^{x+a} f(t)\,dt=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

닫힌 구간 $\left[0,\,\frac{a}{2}\right]$에서 두 실수 b, c에 대하여

$f(x)=b\cos(3x)+c\cos(5x)$일 때, $abc=-\frac{q}{p}\pi$이다.

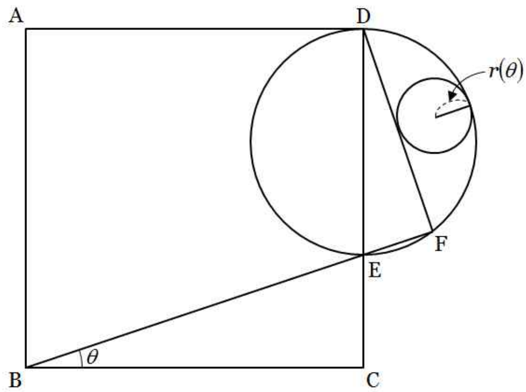
$p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

5 [2017학년도 9월 모평 가형 #20]

그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD가 있다. 변 CD 위의 점 E에 대하여 선분 DE를 지름으로 하는 원과 직선 BE가 만나는 점 중 E가 아닌 점을 F라 하자.

$\angle$EBC$=\theta$라 할 때, 점 E를 포함하지 않는 호 DF를 이등분하는 점과 선분 DF의 중점을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$라 하자.

$\displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{r(\theta)}{\frac{\pi}{4}-\theta}$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) [4점]



6 [2017학년도 수능 9월 모평 가형 #21]

양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 양의 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'=x^2e^{-x^2}$	(나) $g(x)=\dfrac{4}{e^4}\displaystyle\int_1^x e^{t^2}f(t)\,dt$

$f(1)=\dfrac{1}{e}$일 때, $f(2)-g(2)$의 값을 구하시오. [4점]

7 [2017학년도 9월 모평 가형 #30]

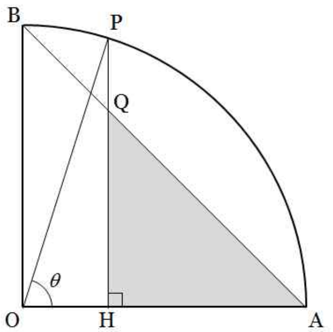
최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 함수

$$g(x)=|2\sin(x+2|x|)+1|$$

에 대하여 함수 $h(x)=f(g(x))$는 실수 전체의 집합에서 이계도함수 $h''(x)$를 갖고, $h''(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. $f'(3)$의 값을 구하시오. [4점]

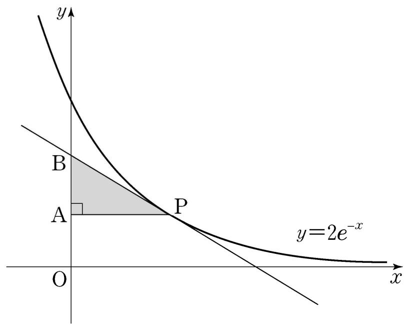
8 [2017학년도 수능 가형 #14]

그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H, 선분 PH와 선분 AB의 교점을 Q라 하자. $\angle \mathrm{POH} = \theta$일 때, 삼각형 AQH의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^4}$의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) [4점]



9 [2017학년도 수능 가형 #15]

곡선 $y = 2e^{-x}$ 위의 점 $\mathrm{P}(t, 2e^{-t})$ $(t > 0)$에서 y축에 내린 수선의 발을 A라 하고, 점 P에서의 접선이 y축과 만나는 점을 B라 하자. 삼각형 APB의 넓이가 최대가 되도록 하는 t의 값을 구하시오. [4점]



10 [2017학년도 수능 가형 #20]

함수 $f(x)=e^{-x}\int_0^x \sin(t^2)\,dt$에 대하여 〈보기〉에서 옳은 것만을 모두 고르시오. [4점]

〈보 기〉

ㄱ. $f(\sqrt{\pi})>0$

ㄴ. $f'(a)>0$을 만족시키는 a가 열린 구간 $(0,\ \sqrt{\pi})$에 적어도 하나 존재한다.

ㄷ. $f'(b)=0$을 만족시키는 b가 열린 구간 $(0,\ \sqrt{\pi})$에 적어도 하나 존재한다.

11 [2017학년도 수능 가형 #21]

닫힌 구간 $[0,1]$에서 증가하는 연속함수 $f(x)$가

$$\int_0^1 f(x)\,dx=2,\ \int_0^1 |f(x)|\,dx=2\sqrt{2}$$

를 만족시킨다. 함수 $F(x)$가

$$F(x)=\int_0^x |f(t)|\,dt\ \ (0\le x\le 1)$$

일 때, $\int_0^1 f(x)F(x)\,dx$의 값을 구하시오. [4점]

12 [2017학년도 수능 가형 #30]

$x>a$에서 정의된 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 -1인 사차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다. (단, a는 상수이다.)

> (가) $x>a$인 모든 실수 x에 대하여 $(x-a)f(x)=g(x)$이다.
>
> (나) 서로 다른 두 실수 α, β에 대하여 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$와 $x=\beta$에서 동일한 극댓값 M을 갖는다. (단, $M>0$)
>
> (다) 함수 $f(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수는 함수 $g(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수보다 많다.

$\beta-\alpha=6\sqrt{3}$일 때, M의 최솟값을 구하시오. [4점]

정답 및 해설

1　$\sqrt{e}$

$g\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=\sqrt{e}$ 임을 이용해서 문제에 주어진 극한을 미분계수의 정의에 맞게 변형하면 다음과 같다.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{g(f(x))-\sqrt{e}}{x-\frac{\pi}{4}}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left\{\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}\times\frac{g(f(x))-g\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)}{f(x)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}\right\}$$

여기서

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}=f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

이고, $f'(x)=2\sin x\cos x=\sin 2x$이므로 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$이다.

또한

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{g(f(x))-g\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)}{f(x)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}$$

에서 $f(x)=t$로 치환하면 $x\to\frac{\pi}{4}$일 때 $t\to\frac{1}{2}$이고,

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$이므로 이 극한은 다음과 같이 변형된다.

$$\lim_{t\to\frac{1}{2}}\frac{g(t)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{t-\frac{1}{2}}=g'\left(\frac{1}{2}\right)$$

그리고 $g'(x)=e^x$이므로 $g'\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}$ 이다.

따라서 주어진 극한의 값은 $1\times\sqrt{e}=\sqrt{e}$ 이다.

[다른 풀이]

문제에 주어진 극한은 $\frac{0}{0}$의 꼴이고, 분모와 분자가 모두 미분가능하므로 로피탈의 정리와 합성함수의 미분법에 의해 다음과 같이 변형된다.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{g(f(x))-\sqrt{e}}{x-\frac{\pi}{4}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}g'(f(x))f'(x)$$

$$=g'\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

그리고 $g'(x)=e^x$, $f'(x)=\sin 2x$이므로

$$g'\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=g'\left(\frac{1}{2}\right)\times 1=\sqrt{e}\times 1=\sqrt{e}$$

2　④

$h(a)=\int_0^a f(x)\,dx+\int_a^8 g(x)\,dx$로 두면 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능한 함수이므로 함수 $h(a)$도 미분가능한 함수가 되고, 도함수는 다음과 같다.

$$h'(a)=f(a)-g(a)$$

방정식 $h'(a)=0$의 해는 방정식 $f(a)=g(a)$의 해와 같고, 문제에 주어진 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프에서 교점의 x좌표를 의미하므로 $a=1$ 또는 $a=6$임을 알 수 있다.

그리고

구간 $(0,1)$에서 $f(a)>g(a)$이므로 $h'(a)>0$
구간 $(1,6)$에서 $f(a)<g(a)$이므로 $h'(a)<0$
구간 $(6,8)$에서 $f(a)>g(a)$이므로 $h'(a)>0$

이므로 구간 $[0,8]$에서 함수 $h(a)$의 증감을 조사하면 다음 표와 같다.

a	0	$\cdots$	1	$\cdots$	6	$\cdots$	8
$h'(a)$		$+$	0	$-$		$+$	
$h(a)$		↗		↘		↗	

여기서

$$h(0)=\int_0^8 g(x)\,dx=\frac{1}{2}\times8\times2=8$$

$$h(6)=\int_0^6 f(x)\,dx+\int_6^8 g(x)\,dx$$

$$=\int_0^6\left(\frac{5}{2}-5\times\frac{2x}{x^2+4}\right)dx+\frac{1}{2}\times2\times1$$

$$=\int_0^6\left\{\frac{5}{2}-5\times\frac{(x^2+4)'}{x^2+4}\right\}dx+1$$

$$=\left[\frac{5}{2}x-5\ln(x^2+4)\right]_0^6+1$$

$$=16-5\ln10$$

이고,

$$h(0)-h(6)=8-(16-5\ln10)=5\ln10-8>0$$

$\because e\fallingdotseq 2.7$로부터 $e^2<10<e^3$
$2<\ln10<3$
$10<5\ln10<15$

으로부터 $h(0)>h(6)$이므로 최솟값은 $h(6)=16-5\ln10$이다.

3　ㄱ

ㄱ. 조건 ㈏로부터 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$가 성립하므로 함수 $f(x)$는 기함수다. 따라서 함수 $f(x)$의 그래프는 원점을 지나면서 원점에 대해 대칭이다.

그리고 조건 ㈎로부터 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \neq 1$이므로 함수 $f(x)$의 그래프가 원점에 대해 대칭이려면 $f(x) \neq -1$도 성립해야 한다. (참)

ㄴ. 조건 ㈐로부터 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \{1+f(x)\}\{1+f(-x)\} \\ &= \{1+f(x)\}\{1-f(x)\} \\ &= 1-\{f(x)\}^2 \end{aligned}$$

또한 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 실수 전체의 집합에서 연속이다. 그리고 ㄱ으로부터 함수 $f(x)$는 그래프가 원점을 지나고 $f(x) \neq 1$, $f(x) \neq -1$을 만족시킨다.

따라서 함수 $f(x)$의 그래프는 두 직선 $y=1$, $y=-1$ 사이의 영역에 그려지므로 (원점을 지나는 그래프가 이 영역을 벗어나면 조건 $f(x) \neq 1$, $f(x) \neq 1$ 때문에 불연속점이 생긴다.) 부등식 $-1 \leq f(x) \leq 1$이 성립하고

$$f'(x) = 1-\{f(x)\}^2 > 0$$

에 의해 실수 전체의 집합에서 증가한다. (거짓)

ㄷ. 조건 ㈐로부터 $f'(x) = 1-\{f(x)\}^2$이 성립하고, 이를 한 번 더 미분하면 다음과 같다.

$$f''(x) = -2f(x)f'(x)$$

ㄴ으로부터 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하고, ㄱ으로부터 함수 $f(x)$의 그래프는 원점을 지나므로 다음이 성립한다.

$x<0$일 때 $f(x)<0$

$x=0$일 때 $f(x)=0$

$x>0$일 때 $f(x)>0$

그리고 ㄴ으로부터 $f'(x)>0$이므로 이계도함수 $f''(x)$는 다음을 만족한다.

$x<0$일 때 $f''(x)>0$

$x=0$일 때 $f''(x)=0$

$x>0$일 때 $f''(x)<0$

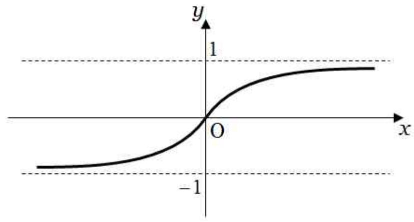
따라서 곡선 $y=f(x)$의 변곡점은 $(0, 0)$ 하나 뿐이다. (거짓)

참고로 곡선 $y=f(x)$의 개형은 다음과 같이 그릴 수 있다.

① 원점을 지나면서 원점에 대해 대칭

② 두 직선 $y=1$, $y=-1$ 사이에 그려지면서 증가하므로 두 직선 $y=1$, $y=-1$이 점근선

③ 구간 $(-\infty, 0)$에서 아래로 볼록, 구간 $(0, \infty)$에서 위로 볼록



4 83

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 실수 전체의 집합에서 연속이다. 따라서 조건 ㈏의 좌변 $\int_x^{x+a} f(t)\,dt$는 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수가 된다.

조건 ㈏의 양변을 x에 대해 미분하면

$$f(x+a)-f(x) = \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right) \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

이고, 여기에 $x=-\frac{a}{2}$를 대입하면 다음과 같이 a의 값을 구할 수 있다.

$$f\left(\frac{a}{2}\right)-f\left(-\frac{a}{2}\right) = \cos\left(-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow\ 0 = \cos\left(-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}\right) \ \Rightarrow\ -\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2}$$

$\because$ 조건 ㈎로부터 $f\left(\frac{a}{2}\right) = f\left(-\frac{a}{2}\right)$

$\because$ $0<a<2\pi$로부터 $-\frac{2}{3}\pi < -\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{3}$

$$\Rightarrow\ a = \frac{5}{3}\pi$$

또한 구간 $\left[0, \frac{a}{2}\right]$에서 $f(x) = b\cos 3x + c\cos 5x$이고, 조건 ㈎에 의해 함수 $f(x)$가 우함수이므로 구간 $\left[-\frac{a}{2}, 0\right]$에서의 $f(x)$는 구간 $\left[0, \frac{a}{2}\right]$에서의 함수식을 y축에 대해 대칭이동한

$$f(x) = b\cos(-3x) + c\cos(-5x) = b\cos 3x + c\cos 5x$$

이다. 그러므로 구간 $\left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$에서 $f(x)$는

$$f(x) = b\cos 3x + c\cos 5x$$

가 된다.

이 함수식을 활용하기 위해 조건 ㈏에 $x=-\frac{a}{2}$를 대입해서 계산하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} f(t)\,dt &= 2\int_0^{\frac{a}{2}} (b\cos 3x + c\cos 5x)\,dt \\ &= 2\left[\frac{b}{3}\sin 3x + \frac{c}{5}\sin 5x\right]_0^{\frac{a}{2}} \end{aligned}$$

$$=\frac{2}{3}b\sin\frac{3}{2}a+\frac{2}{5}c\sin\frac{5}{2}a=\sin\left(-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}b\sin\frac{5}{2}\pi+\frac{2}{5}c\sin\frac{25}{6}\pi=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}b+\frac{1}{5}c=-1 \qquad \cdots\cdots ②$$

b, c에 대한 방정식을 하나 더 만들기 위해 ①의 양변을 x에 대해 미분하고, $x=-\frac{a}{2}$를 대입하면 다음과 같다.

$$f'(x+a)-f'(x)=-\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow f'\left(\frac{a}{2}\right)-f'\left(-\frac{a}{2}\right)=-\sin\left(-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$$

조건 (가)의 양변을 x에 대해 미분하면 $f'(x)=-f'(-x)$이므로 $f'\left(\frac{a}{2}\right)=-f'\left(-\frac{a}{2}\right)$가 성립하고, 이를 위의 식에 대입해서 정리하면 다음과 같다.

$$2f'\left(\frac{a}{2}\right)=-\sin\left(-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow 2f'\left(\frac{5}{6}\pi\right)=-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f'\left(\frac{5}{6}\pi\right)=\frac{1}{2}$$

구간 $\left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$에서 함수 $f(x)$의 도함수는

$$f'(x)=-3b\sin 3x-5c\sin 5x$$

이고, 여기에 $x=\frac{5}{6}\pi$를 대입하면 다음과 같은 방정식을 얻을 수 있다.

$$f'\left(\frac{5}{6}\pi\right)=-3b\sin\frac{5}{2}\pi-5c\sin\frac{25}{6}\pi$$

$$=-3b-\frac{5}{2}c=\frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots ③$$

②, ③을 연립해서 풀면 $b=-\frac{9}{4}$, $c=\frac{5}{2}$이므로

$$abc=\frac{5}{3}\pi\times\left(-\frac{9}{4}\right)\times\frac{5}{2}=-\frac{75}{8}\pi \Rightarrow p+q=83$$

[다른 풀이]

구간 $\left[0, \frac{a}{2}\right]$에서 $f(x)=b\cos 3x+c\cos 5x$이고, 조건 (가)에 의해 함수 $f(x)$가 우함수이므로 구간 $\left[-\frac{a}{2}, 0\right]$에서는

$$f(x)=b\cos(-3x)+c\cos(-5x)=b\cos 3x+c\cos 5x$$

이다. 그러므로 구간 $\left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$에서 $f(x)$는

$$f(x)=b\cos 3x+c\cos 5x \qquad \cdots\cdots ①$$

가 된다.

이 함수식을 활용하기 위해 조건 (나)에 $x=-\frac{a}{2}$를 대입해서 계산하면 다음과 같다.

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} f(t)\,dt=2\int_0^{\frac{a}{2}}(b\cos 3x+c\cos 5x)\,dx$$

$$=2\left[\frac{b}{3}\sin 3x+\frac{c}{5}\sin 5x\right]_0^{\frac{a}{2}}$$

$$=\frac{2}{3}b\sin\frac{3}{2}a+\frac{2}{5}c\sin\frac{5}{2}a=\sin\left(-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}b\sin\frac{5}{2}\pi+\frac{2}{5}c\sin\frac{25}{6}\pi=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}b+\frac{1}{5}c=-1 \qquad \cdots\cdots ②$$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 실수 전체의 집합에서 연속이다. 따라서 조건 (나)의 좌변 $\int_x^{x+a} f(t)\,dt$는 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수가 된다.

이때, 조건 (나)의 양변을 x에 대해 미분하면 다음과 같다.

$$f(x+a)-f(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$f(x+a)=f(x)+\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$

여기서 x가 구간 $\left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$에 속한다고 가정하면 ①에 의해

$$f(x+a)=b\cos 3x+c\cos 5x+\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$

가 되고, $x+a=t$로 치환하면 다음과 같이 변형된다.

$$f(t)=b\cos 3(t-a)+c\cos 5(t-a)+\cos\left(t-a+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\left(\text{단, } \frac{a}{2}\le t\le\frac{3}{2}a\right) \qquad \cdots\cdots ③$$

①, ③으로부터 구간 $\left[-\frac{a}{2}, \frac{3}{2}a\right]$에서 함수 $f(x)$의 함수식은 다음과 같다.

$$f(x)=\begin{cases} b\cos 3x+c\cos 5x & \left(-\frac{a}{2}\le x\le\frac{a}{2}\right) \\ b\cos 3(x-a)+c\cos 5(x-a) \\ \qquad +\cos\left(x-a+\frac{\pi}{3}\right) & \left(\frac{a}{2}\le x\le\frac{3}{2}a\right) \end{cases}$$

그리고 함수 $f(x)$가 $x=\frac{a}{2}$에서 연속임을 이용해서 a의 값을 구하면 다음과 같다.

$$\lim_{x\to\frac{a}{2}-} f(x)=\lim_{x\to\frac{a}{2}+} f(x)$$

$$[b\cos 3x + c\cos 5x]_{x=\frac{a}{2}}$$
$$= \left[b\cos 3(x-a) + c\cos 5(x-a) + \cos\left(x - a + \frac{\pi}{3}\right)\right]_{x=\frac{a}{2}}$$

$$b\cos\frac{3}{2}a + c\cos\frac{5}{2}a$$
$$= b\cos\left(-\frac{3}{2}a\right) + c\cos\left(-\frac{5}{2}a\right) + \cos\left(-\frac{a}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\cos\left(-\frac{a}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow -\frac{a}{2} + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow a = \frac{5}{3}\pi$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \because 0 < a < 2\pi\text{로부터} \\ \quad -\frac{2}{3}\pi < -\frac{a}{2} + \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{3} \end{array}}$$

또한 함수 $f(x)$의 구간 $\left(-\frac{a}{2}, \frac{3}{2}a\right)$에서의 도함수가

$$f'(x) = \begin{cases} -3b\sin 3x - 5c\sin 5x & \left(-\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2}\right) \\ -3b\sin 3(x-a) - 5c\sin 5(x-a) \\ \qquad - \sin\left(x - a + \frac{\pi}{3}\right) & \left(\frac{a}{2} < x < \frac{3}{2}a\right) \end{cases}$$

이고, 함수 $f(x)$가 $x = \frac{a}{2}$에서 미분가능함을 이용해서 b, c에 대한 방정식을 만들면 다음과 같다.

$(x = \frac{a}{2}$에서의 좌미분계수$) = (x = \frac{a}{2}$에서의 우미분계수$)$

$$[-3b\sin 3x - 5c\sin 5x]_{x=\frac{a}{2}}$$
$$= \left[-3b\sin 3(x-a) - 5c\sin 5(x-a) - \sin\left(x - a + \frac{\pi}{3}\right)\right]_{x=\frac{a}{2}}$$

$$-3b\sin\frac{3}{2}a - 5c\sin\frac{5}{2}a = 3b\sin\frac{3}{2}a + 5c\sin\frac{5}{2}a + \sin\left(\frac{a}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$6b\sin\frac{3}{2}a + 10c\sin\frac{5}{2}a = -\sin\left(\frac{a}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$6b + 5c = -1 \qquad \cdots\cdots ④$$

②, ④를 연립해서 풀면 $b = -\frac{9}{4}$, $c = \frac{5}{2}$이므로

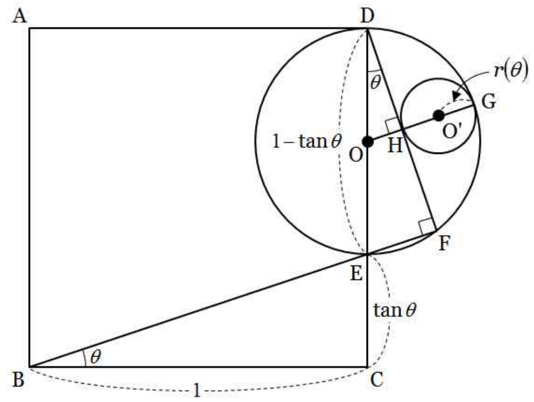
$$abc = \frac{5}{3}\pi \times \left(-\frac{9}{4}\right) \times \frac{5}{2} = -\frac{75}{8}\pi \Rightarrow p + q = 83$$

5 $\quad \frac{2-\sqrt{2}}{4}$

점 E를 포함하지 않는 호 DF의 중점을 G, 선분 DF의 중점을 H, 선분 DE의 중점을 O, 선분 GH의 중점을 O′으로 두면 점 G는 큰 원과 작은 원의 접점, 점 H는 작은 원과 선분 DF의 접점, 점 O는 큰 원의 중심, 점 O′은 작은 원의 중심이다.

그리고 작은 원에서 반지름 O′H와 접선 DF가 직교하므로 반지름 O′H를 포함하는 선분 OG와 선분 DF도 직교한다. 또한 각 DFE는 지름 DE의 원주각이므로 $\angle\text{DFE} = 90°$이다.

이를 이용해서 작은 원의 반지름 $r(\theta)$를 θ에 대한 식으로 표현하면 다음과 같다.



삼각형 BCE에서

$$\tan\theta = \frac{\overline{\text{CE}}}{\overline{\text{BC}}} \Rightarrow \overline{\text{CE}} = \overline{\text{BC}}\tan\theta = \tan\theta$$

삼각형 DEF에서

$$\overline{\text{DE}} = \overline{\text{CD}} - \overline{\text{CE}} = 1 - \tan\theta$$

$\angle\text{EDF} + \angle\text{DEF} = 90°$, $\angle\text{DEF} = \angle\text{BEC} = 90° - \theta$이므로

$$\angle\text{EDF} = \theta$$

삼각형 ODH에서

$$\sin\theta = \frac{\overline{\text{OH}}}{\overline{\text{OD}}} \Rightarrow \overline{\text{OH}} = \overline{\text{OD}}\sin\theta = \frac{1}{2}(1 - \tan\theta)\sin\theta$$

$$\therefore \overline{\text{OG}} = \overline{\text{OH}} + \overline{\text{HG}}$$
$$\Rightarrow \frac{1 - \tan\theta}{2} = \frac{1}{2}(1 - \tan\theta)\sin\theta + 2r(\theta)$$
$$\Rightarrow r(\theta) = \frac{1}{4}(1 - \tan\theta)(1 - \sin\theta)$$

이를 문제에 주어진 극한에 대입하면

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}-} \frac{r(\theta)}{\frac{\pi}{4} - \theta} = \frac{1}{4}\lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}-} \frac{(1 - \tan\theta)(1 - \sin\theta)}{\frac{\pi}{4} - \theta}$$

가 된다. 여기서 분자의 $1 - \tan\theta$와 분모의 $\frac{\pi}{4} - \theta$는 0으로 수렴하고, 분자의 $1 - \sin\theta$는 $1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$로 수렴하므로 다음과 같은 $\frac{0}{0}$의 꼴만 따로 계산해보자.

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}-} \frac{1 - \tan\theta}{\frac{\pi}{4} - \theta}$$

삼각함수의 극한 공식을 적용하기 위해 $\frac{\pi}{4}-\theta=x$로 치환하면

$$1-\tan\theta=1-\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=1-\frac{1-\tan x}{1+\tan x}=\frac{2\tan x}{1+\tan x}$$

가 되고, $\frac{0}{0}$의 꼴은 다음과 같이 계산된다.

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{1-\tan\theta}{\frac{\pi}{4}-\theta}=\lim_{x\to0+}\left(2\times\frac{\tan x}{x}\times\frac{1}{1+\tan x}\right)=2$$

그러므로 주어진 극한의 값은 다음과 같다.

$$\frac{1}{4}\times\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{1-\tan\theta}{\frac{\pi}{4}-\theta}\times\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}(1-\sin\theta)$$

$$=\frac{1}{4}\times2\times\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

6 $\frac{20}{3e^4}$

조건 (나)로부터

$$g(2)=\frac{4}{e^4}\int_1^2 e^{t^2}f(t)\,dt$$

이고, 여기에 조건 (가)를 적용하기 위해 피적분함수를 $\frac{f(t)}{t}$가 포함된 형태로 변형하면 다음과 같다.

$$g(2)=\frac{4}{e^4}\int_1^2\left\{\frac{f(t)}{t}\times2te^{t^2}\times\frac{1}{2}\right\}dt$$

치환적분법을 적용할 수 있도록
지수의 도함수를 왼쪽에 위치시킴

$$=\frac{2}{e^4}\int_1^2\left\{\frac{f(t)}{t}\times2te^{t^2}\right\}dt$$

위 식에 포함된 정적분에 부분적분법을 적용하기 위해 $\frac{f(t)}{t}$를 미분, $2te^{t^2}$을 적분하면 다음과 같다.

$$\int_1^2\left\{\frac{f(t)}{t}\times2te^{t^2}\right\}dt$$

$$=\left[\frac{f(t)}{t}\times e^{t^2}\right]_1^2-\int_1^2\left\{\left(\frac{f(t)}{t}\right)'\times e^{t^2}\right\}dt$$

$$=\frac{f(2)}{2}\times e^4-f(1)\times e-\int_1^2 t^2\,dt$$

$$=\frac{f(2)}{2}\times e^4-1-\left[\frac{1}{3}t^3\right]_1^2$$

$$=\frac{f(2)}{2}\times e^4-\frac{10}{3}$$

따라서

$$g(2)=\frac{2}{e^4}\left\{\frac{f(2)}{2}\times e^4-\frac{10}{3}\right\}=f(2)-\frac{20}{3e^4}$$

$$f(2)-g(2)=\frac{20}{3e^4}$$

7 48

문제에 주어진 함수 $g(x)$의 함수식

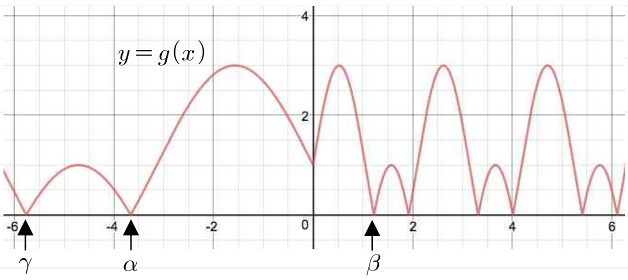
$$g(x)=|2\sin(x+2|x|)+1|$$

에서 안쪽의 절댓값 기호를 없애면 다음과 같다.

$$g(x)=\begin{cases}|2\sin x-1| & (x<0)\\ |2\sin 3x+1| & (x\ge0)\end{cases}$$

따라서 함수 $g(x)$의 그래프는 $x<0$일 때 함수 $y=2\sin x-1$의 그래프에서 x축 아랫부분만 x축에 대해 대칭이동시킨 것이고, $x\ge0$일 때 함수 $y=2\sin3x+1$의 그래프에서 x축 아랫부분만 x축에 대해 대칭이동시킨 것이다.

이를 이용해서 함수 $g(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다. (아래 그림은 그래프 작성용 앱으로 그린 것이며, 실제 문제를 풀 때는 개형을 파악하는 것으로 충분하다.)



만일 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하다면 함수 $h(x)=f(g(x))$의 도함수는 $h'(x)=f'(g(x))g'(x)$이다. 그러나 실제로는 함수 $g(x)$가 미분불가능한 점을 갖기 때문에 (위 그래프에서 뾰족한 부분) 함수 $h(x)$의 도함수는 함수 $g(x)$가 미분가능한 구간을 잡아서 구해야 한다.

예를 들어 구간 $(\alpha, 0)$에서는 $g(x)=-2\sin x+1$이므로 함수 $h(x)$의 도함수가

$$h'(x)=f'(g(x))g'(x)=f'(-2\sin x+1)\cdot(-2\cos x)$$

이고, 구간 $(0,\beta)$에서는 $g(x)=2\sin3x+1$이므로 함수 $h(x)$의 도함수가

$$h'(x)=f'(g(x))g'(x)=f'(2\sin3x+1)\cdot(6\cos3x)$$

이다.

이때, 함수 $h'(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to0-}h'(x)=\lim_{x\to0+}h'(x)$$

$$\lim_{x\to0-}\{f'(-2\sin x+1)\cdot(-2\cos x)\}$$

$$=\lim_{x\to0+}\{f'(2\sin3x+1)\cdot(6\cos3x)\}$$

$$f'(1)\times(-2)=f'(1)\times6$$

$$f'(1)=0 \qquad \cdots\cdots\text{①}$$

마찬가지로 함수 $h(x)$의 이계도함수도 함수 $g(x)$가 두 번 미분가능한 구간을 잡아서 구해야 한다.

예를 들어 구간 $(\alpha, 0)$에서는 $g(x) = -2\sin x + 1$이므로 함수 $h(x)$의 이계도함수가

$$\begin{aligned} h''(x) &= f''(g(x))g'(x) + f'(g(x))g''(x) \\ &= f''(-2\sin x+1)\cdot(-2\cos x) \\ &\quad + f'(-2\sin x+1)\cdot(2\sin x) \end{aligned}$$

이고, 구간 $(0, \beta)$에서는 $g(x) = 2\sin 3x + 1$이므로 함수 $h(x)$의 도함수가

$$\begin{aligned} h''(x) &= f''(g(x))g'(x) + f'(g(x))g''(x) \\ &= f''(2\sin 3x+1)\cdot(6\cos 3x) \\ &\quad + f'(2\sin 3x+1)\cdot(-18\sin 3x) \end{aligned}$$

이다.

이때, 함수 $h''(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to0-} h''(x) = \lim_{x\to0+} h''(x)$$

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to0-} \{f''(-2\sin x+1)\cdot(-2\cos x) \\ &\quad + f'(-2\sin x+1)\cdot(2\sin x)\} \\ &= \lim_{x\to0+} \{f''(2\sin 3x+1)\cdot(6\cos 3x) \\ &\quad + f'(2\sin 3x+1)\cdot(-18\sin 3x)\} \end{aligned}$$

$$f''(1)\times(-2) = f''(1)\times 6$$

$$f''(1) = 0 \qquad \cdots\cdots②$$

문제에서 $f(x)$가 최고차항 계수가 1인 사차함수라고 했으므로 $f'(x)$는 최고차항 계수가 4인 삼차함수다. 따라서

$$f'(x) = 4x^3 + ax^2 + bx + c \qquad \cdots\cdots③$$

와 같이 미정계수가 3개인 식으로 표현할 수 있으며, 미정계수 a, b, c의 값을 구하기 위해서는 ①, ②와 함께 하나의 조건이 더 필요하다.

이를 찾기 위해 앞의 그래프에서 함수 $g(x)$가 미분불가능한 또 다른 점 $x=\alpha$를 생각해보자. (α는 방정식 $2\sin x - 1 = 0$의 음의 해 가운데 가장 큰 $-\frac{7}{6}\pi$이다.)

구간 (γ, α)에서는 $g(x) = 2\sin x - 1$이므로 함수 $h(x)$의 도함수가

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x) = f'(2\sin x - 1)\cdot(2\cos x)$$

이고, 구간 $(\alpha, 0)$에서는 $g(x) = -2\sin x + 1$이므로 함수 $h(x)$의 도함수가

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x) = f'(-2\sin x+1)\cdot(-2\cos x)$$

이다.

이때, 함수 $h'(x)$가 $x=\alpha$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to\alpha-} h'(x) = \lim_{x\to\alpha+} h'(x)$$

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to\alpha-} \{f'(2\sin x-1)\cdot(2\cos x)\} \\ &= \lim_{x\to\alpha+} \{f'(-2\sin x+1)\cdot(-2\cos x)\} \end{aligned}$$

$$f'(0)\times(2\cos\alpha) = f'(0)\times(-2\cos\alpha)$$

$$f'(0) = 0 \qquad \cdots\cdots④$$

①, ④를 이용하면 ③은

$$f'(x) = 4x(x-1)(x+d)$$

와 같이 간단하게 나타낼 수 있으며, 한 번 더 미분해서 ②를 적용하면 다음과 같이 d의 값을 구할 수 있다.

$$f''(x) = 4(x-1)(x+d) + 4x(x+d) + 4x(x-1)$$

$$f''(1) = 4(1+d) = 0 \Rightarrow d = -1$$

그러므로

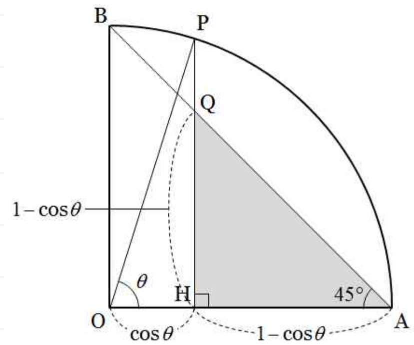
$$f'(x) = 4x(x-1)^2 \Rightarrow f'(3) = 48$$

8 $\frac{1}{8}$

삼각형 OPH에서

$$\cos\theta = \frac{\overline{OH}}{\overline{OP}} \Rightarrow \overline{OH} = \overline{OP}\cos\theta = \cos\theta$$

이므로 $\overline{AH} = 1-\cos\theta$이고, 삼각형 OAB가 직각이등변삼각형이므로 $\overline{QH} = \overline{AH} = 1-\cos\theta$가 된다.



따라서

$$S(\theta) = \frac{1}{2}\times(1-\cos\theta)\times(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}(1-\cos\theta)^2$$

$$\begin{aligned} \lim_{\theta\to0+} \frac{S(\theta)}{\theta^4} &= \lim_{\theta\to0+} \frac{(1-\cos\theta)^2}{2\theta^4} \\ &= \lim_{\theta\to0+} \frac{(1-\cos\theta)^2\times(1+\cos\theta)^2}{2\theta^4\times(1+\cos\theta)^2} \\ &= \lim_{\theta\to0+} \frac{(1-\cos^2\theta)^2}{2\theta^4(1+\cos\theta)^2} \\ &= \lim_{\theta\to0+} \frac{\sin^4\theta}{2\theta^4(1+\cos\theta)^2} \end{aligned}$$

$$= \lim_{\theta \to 0+} \left\{ \frac{1}{2} \times \left(\frac{\sin\theta}{\theta} \right)^4 \times \frac{1}{(1+\cos\theta)^2} \right\}$$
$$= \frac{1}{2} \times 1^4 \times \frac{1}{2^2} = \frac{1}{8}$$

9 2

점 A의 좌표는 $(0, 2e^{-t})$이다. 그리고 함수 $y=2e^{-x}$의 도함수가 $y' = -2e^{-x}$이므로 곡선 $y=2e^{-x}$ 위의 점 $\mathrm{P}(t, 2e^{-t})$에서의 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$y = -2e^{-t}(x-t)+2e^{-t}$$
$$\Rightarrow y = -2e^{-t}x+2(t+1)e^{-t}$$

따라서 점 B의 좌표는 $(0, 2(t+1)e^{-t})$이고, 선분 AB의 길이는 다음과 같다.

$$\overline{\mathrm{AB}} = 2(t+1)e^{-t} - 2e^{-t} = 2te^{-t}$$

삼각형 APB의 넓이를 $S(t)$로 두면 함수 $S(t)$의 함수식과 도함수 $S'(t)$, 함수 $S(t)$의 증감표가 다음과 같다.

$$S(t) = \frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{AP}} \times \overline{\mathrm{AB}} = \frac{1}{2} \times t \times 2te^{-t} = t^2 e^{-t}$$
$$S'(t) = 2te^{-t} + t^2(-e^{-t}) = -t(t-2)e^{-t}$$

t	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$
$S'(t)$		$+$	0	$-$
$S(t)$		$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$

그러므로 삼각형의 넓이는 $t=2$일 때 최대다.

10 ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $f(x) = e^{-x}\int_0^x \sin(t^2)\,dt$로부터

$$f(\sqrt{\pi}) = e^{-\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{\pi}} \sin(t^2)\,dt$$

이고, $0 \le t \le \sqrt{\pi}$일 때

$$0 \le t^2 \le \pi \Rightarrow 0 \le \sin(t^2) \le 1 \Rightarrow \int_0^{\sqrt{\pi}} \sin(t^2)\,dt > 0$$

이므로 $f(\sqrt{\pi}) > 0$이다. (참)

ㄴ. 함수 $y=\sin(t^2)$이 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $y=\int_0^x \sin(t^2)\,dt$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, 함수 $f(x)$도 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

그러므로 함수 $f(x)$는 구간 $[0, \sqrt{\pi}]$에서 연속이고, 구간 $(0, \sqrt{\pi})$에서 미분가능하다고 할 수 있다.

이때, 함수 $f(x)$의 구간 $[0, \sqrt{\pi}]$에서의 <u>평균값 정리</u>에 의해

$$f'(a) = \frac{f(\sqrt{\pi})-f(0)}{\sqrt{\pi}-0} = \frac{f(\sqrt{\pi})}{\sqrt{\pi}} > 0$$

을 만족시키는 a가 열린 구간 $(0, \sqrt{\pi})$에 적어도 하나 존재한다. (참)

ㄷ. 함수 $f(x)$의 도함수는

$$f'(x) = -e^{-x}\int_0^x \sin(t^2)\,dt + e^{-x}\sin(x^2)$$

이고

$$f'(\sqrt{\pi}) = -e^{-\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{\pi}} \sin(t^2)\,dt < 0$$

이다. 그리고 ㄴ으로부터 $f'(a) > 0$이므로 구간 $[a, \sqrt{\pi}]$의 좌우 양끝에서 도함수 $f'(x)$의 부호가 반대다.

함수 $y=\int_0^x \sin(t^2)\,dt$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 도함수 $f'(x)$도 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. 따라서 도함수 $f'(x)$는 구간 $[a, \sqrt{\pi}]$에서 연속이라고 할 수 있다.

이때, 도함수 $f'(x)$의 구간 $[a, \sqrt{\pi}]$에서의 <u>사이값 정리</u>에 의해 $f'(b)=0$을 만족시키는 b가 구간 $(a, \sqrt{\pi})$에 적어도 하나 존재한다. 또한 구간 $(0, \sqrt{\pi})$가 $(a, \sqrt{\pi})$를 포함하므로 $f'(b)=0$을 만족시키는 b는 구간 $(0, \sqrt{\pi})$에 속한다. (참)

11 $1+2\sqrt{2}$

정적분 $\int_0^1 f(x)\,dx = 2$와 $\int_0^1 |f(x)|\,dx = 2\sqrt{2}$는 구간 $[0, 1]$에서 함수 $f(x)$의 그래프와 x축 사이의 도형에 대하여 다음을 의미한다.

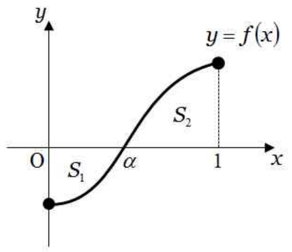
$$\int_0^1 f(x)\,dx = (x\text{축 윗부분 넓이}) - (x\text{축 아랫부분 넓이}) = 2$$

$$\int_0^1 |f(x)|\,dx = (x\text{축 윗부분 넓이}) + (x\text{축 아랫부분 넓이}) = 2\sqrt{2}$$

그러므로 구간 $[0, 1]$에서 함수 $f(x)$의 그래프와 x축 사이의 도형에서 x축 아랫부분의 넓이를 S_1, x축 윗부분의 넓이를 S_2로 두면 각각의 값을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{cases} S_2 - S_1 = 2 \\ S_2 + S_1 = 2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} S_1 = \sqrt{2}-1 \\ S_2 = \sqrt{2}+1 \end{matrix}$$

또한 함수 $f(x)$가 구간 $[0, 1]$에서 증가하는 연속함수이므로 그래프 개형을 그리면 다음과 같다. (단, α는 방정식 $f(x)=0$의 실근)



다음으로 문제에 주어진 정적분

$$\int_0^1 f(x)F(x)\,dx \qquad \cdots\cdots\cdots①$$

에서 $F(x)$는

$$F(x) = \int_0^x |f(t)|\,dt \ \ (0 \le x \le 1)$$

로 정의된다. 그리고 구간 $[0, 1]$에서 함수 $f(x)$가 연속이므로 함수 $|f(x)|$도 연속이다. 따라서 함수 $F(x)$는 구간 $(0, 1)$에서 미분가능하고, 도함수는 다음과 같다.

$$F'(x) = |f(x)| = \begin{cases} -f(x) & (0 \le x \le \alpha) \\ f(x) & (\alpha \le x \le 1) \end{cases}$$

따라서 ①은 다음과 같이 변형된다.

$$\begin{aligned} &\int_0^1 f(x)F(x)\,dx \\ &= \int_0^\alpha f(x)F(x)\,dx + \int_\alpha^1 f(x)F(x)\,dx \\ &= -\int_0^\alpha F'(x)F(x)\,dx + \int_\alpha^1 F'(x)F(x)\,dx \end{aligned}$$

여기에 치환적분법을 적용하기 위해 $F(x) = t$로 두고 양변을 x에 대해 미분하면

$$F'(x)\,dx = dt$$

가 되고,

$$F(0) = 0,\ F(\alpha) = S_1 = \sqrt{2}-1,\ F(1) = S_1 + S_2 = 2\sqrt{2}$$

이므로 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} &-\int_0^{\sqrt{2}-1} t\,dt + \int_{\sqrt{2}-1}^{2\sqrt{2}} t\,dt \\ &= -\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^{\sqrt{2}-1} + \left[\frac{1}{2}t^2\right]_{\sqrt{2}-1}^{2\sqrt{2}} \\ &= 1 + 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

12 216

조건 ㈎로부터 $x > a$인 모든 실수 x에 대하여 $(x-a)f(x) = g(x)$가 성립하고, $g(x)$는 사차식이다.

여기서 $f(x)$를 삼차식으로 보면 삼차함수 $f(x)$는 극댓값을 많아야 하나 가질 수 있으므로 조건 ㈏에 모순이 된다. 이때는

$$f(x) = \frac{g(x)}{x-a} \ \ (x > a)$$

임을 이용해서 $f(x)$를 $\dfrac{(\text{사차식})}{(\text{일차식})}$ 꼴의 분수식으로 봐야 한다.

다음으로 조건 ㈏로부터

$$f'(\alpha) = f'(\beta) = 0,\ f(\alpha) = f(\beta) = M$$

이므로 $h(x) = f(x) - M$으로 두면

$$h'(\alpha) = h'(\beta) = 0,\ h(\alpha) = h(\beta) = 0$$

이 성립한다. 따라서 함수

$$h(x) = f(x) - M = \frac{g(x)}{x-a} - M = \frac{g(x)-(x-a)M}{x-a}$$

의 분자 $g(x)-(x-a)M$은 $(x-\alpha)^2$, $(x-\beta)^2$을 인수로 갖는다.

또한 $g(x)$가 최고차항 계수가 -1인 사차식이므로 $h(x)$의 분자 $g(x)-(x-a)M$도 최고차항의 계수가 -1인 사차식이며, 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$g(x) - (x-a)M = -(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$$
$$g(x) = -(x-\alpha)^2(x-\beta)^2 + (x-a)M$$

이를 이용하면 $f(x)$는

$$f(x) = -\frac{(x-\alpha)^2(x-\beta)^2}{x-a} + M$$

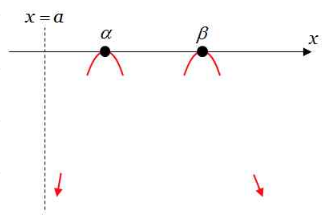
이 되고, 그래프 개형은 다음과 같이 그릴 수 있다.

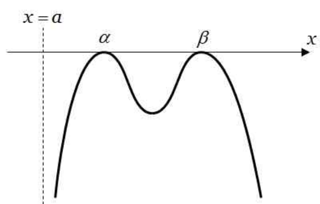
① 함수 $y = -\dfrac{(x-\alpha)^2(x-\beta)^2}{x-a}$의 그래프 개형을 x절편, y의 부호, 점근선을 이용해서 그린다.

x절편: α, β

y의 부호: 함수 $f(x)$가 $x > a$에서 정의되므로 $a < \alpha < \beta$로 보면 $(x-\alpha)^2 \ge 0$, $(x-\beta)^2 \ge 0$이므로 구간 (a, α), (α, β), (β, ∞)에서 $y < 0$

점근선: $x \to a+$일 때 $y \to -\infty$이므로 점근선 $x = a$
$x \to \infty$일 때 $y \to -\infty$

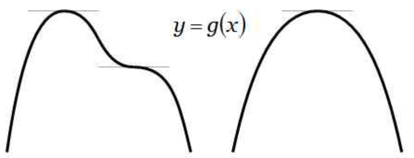




② ①에서 그린 그래프를 y축의 방향으로 M만큼 평행이동시키면 함수 $f(x)$의 그래프가 된다. (조건 ㈐를 활용하려면 함수 $f(x)$의 극점 개수만 파악하면 되므로 그래프 ①로 충분하며, 그래프 ②는 그릴 필요가 없다.)

따라서 함수 $f(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수는 3이며, 조건 ㈐를 만족시키려면 함수 $g(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개

수가 2 이하가 되어야 한다. 그리고 $g(x)$가 사차함수이므로 극대 또는 극소가 되는 x의 개수가 2 이하인 경우는 다음과 같이 극점이 하나 뿐일 때, 즉 방정식 $g'(x)=0$의 실근이 2개 이하일 때가 있다.



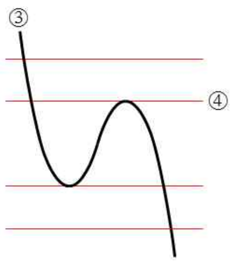
함수 $g(x)$의 도함수는

$$\begin{aligned} g'(x) &= -2(x-\alpha)(x-\beta)(2x-\alpha-\beta)+M \\ &= -4(x-\alpha)\left(x-\alpha-3\sqrt{3}\right)\left(x-\alpha-6\sqrt{3}\right)+M \end{aligned}$$
$$\left(\because \beta=\alpha+6\sqrt{3}\right)$$

이고, 방정식 $g'(x)=0$의 실근은 두 함수

$$y=-4(x-\alpha)\left(x-\alpha-3\sqrt{3}\right)\left(x-\alpha-6\sqrt{3}\right) \quad \cdots ③$$
$$y=M \quad \cdots ④$$

의 교점의 x좌표와 같다. 따라서 방정식 $g'(x)=0$의 실근이 2개 이하이려면 다음 그림과 같이 ③, ④의 그래프가 두 개 이하의 점에서 만나야 한다.



이를 만족시키는 M의 범위는

$M \le$ (③의 극솟값) 또는 $M \ge$ (③의 극댓값)

이며, ③의 극값을 구하려면 ③을 미분해야 한다. 그런데 ③은 미분하기 복잡하므로 극값의 변화가 없도록 x축 방향으로만 평행이동해서 식을 간단하게 만들어보자.

③을 x축 방향으로 $-\alpha-3\sqrt{3}$만큼 평행이동시키면

$$y=-4x\left(x+3\sqrt{3}\right)\left(x-3\sqrt{3}\right)=-4\left(x^3-27x\right)$$

이 되고, 극값은 ③과 같다. 그리고 이 함수의 도함수가

$$y'=-4\left(3x^2-27\right)=-12(x+3)(x-3)$$

이므로 두 극값은

$$y_{x=-3}=-216,\ y_{x=3}=216$$

이다.

그러므로 M의 범위는 $M \le -216$ 또는 $M \ge 216$이고, M이 양수이므로 M의 최솟값은 216이다.